FONDAZIONE
CASSA DI RISPARMIO
DI TRENTO E ROVERETO

IPRASE TRENTINO

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

Matematica in laboratorio
Esperienze e sperimentazioni in classe

Resoconto delle esperienze maturate nell'ambito del progetto "Matematica in laboratorio" realizzato grazie alla collaborazione in rete degli Istituti:

- *Istituto Comprensivo di scuola elementare e media - Vigolo Vattaro*
- *Istituto Comprensivo di scuola elementare e media – Cles*
- *Istituto Comprensivo di scuola elementare e media – Dro*
- *ITCG e Industriale "A. Pilati" – Cles*
- *Liceo "A. Rosmini" – Trento*
- *Liceo Scientifico "G. Galilei" – Trento*
- *Liceo Scientifico "L. da Vinci" – Trento*
- *IPRASE del Trentino*
- *Dipartimento di Matematica – Università di Trento*
- *Fondazione CARITRO – Trento*

Hanno contribuito:

Franca Baldessari, Cristina Bonmassar, Maria Vittoria Cicinelli, Elena Cosser, Giancarlo Dorigotti, Patrizia Franzoni, Aldo Gabbi, Paola Lionello, Maddalena Litterini, Domenico Luminati, Elisabetta Ossanna, Antonia Romano, Giuliana Scarpa, Roberta Scarpa, Italo Tamanini, Fulvio Torresani

matematita

Progetto
Lauree Scientifiche

Esperimenti matematici... ma sono davvero possibili?

Senza dilungarci tanto in questioni filosofiche, diciamo semplicemente: sì, sono possibili. In questo libro abbiamo raccolto i nostri esperimenti matematici preferiti. Non siete obbligati a esaminarli nell'ordine in cui ve li proponiamo. Cominciate pure da quello che vi ispira di più.

Non abbiate dubbi, sono esperimenti in piena regola, perché vi si chiederà di fare qualcosa. Ma non temete, non avrete bisogno di chissà che materiale (il più delle volte basterà un po' di carta), né di strumenti insoliti (qualche volta vi occorrerà una forbice), né di una particolare abilità manuale (giusto quel tanto che basta per piegare un foglio). Il nostro motto è: più semplice è, meglio è. E in effetti la maggior parte di questi esperimenti è adatta anche ai bambini, perfino a quelli che frequentano ancora la scuola materna, i quali potranno così avvicinarsi per la prima volta alla matematica.

Perché questi che vi proponiamo sono appunto esperimenti matematici. E come si conviene a ogni buon esperimento, vi stupirete, vi meraviglierete e qualche volta rimarrete addirittura sbalorditi. Ma gli esperimenti matematici non si fermano qui. Suggeriscono domande (ma perché succede?), stimolano l'immaginazione (com'è possibile che qualcosa di bidi-mensionale diventi tridimensionale?) e racchiudono spunti per arrivare a chiarirsi le idee. Perché spesso, a un certo punto della riflessione, capita di avvertire un improvviso «clic! » (il famoso effetto «aha! ») e, come se un lampo vi illuminasse il cervello, intravedete la « soluzione », ovvero arrivate a capire.

Se qualcuno vuol conoscere le differenze fra l'esperimento scientifico e l'esperimento matematico, eccone una: l'esperimento scientifico dimostra una legge di natura, l'esperimento matematico fa pensare.

Albrecht Beutelspacher Marcus Wagner
"Piega e spiega la matematica" Laboratorio di giochi matematici
PONTE ALLE GRAZIE Salani Editore Milano 2009

Premessa

Il progetto “Matematica in laboratorio” è stato cofinanziato dalla Fondazione Cassa di Risparmio di Trento e Rovereto nell’ambito del Bando Scuole 2007/2009[1] rivolto agli istituti scolastici del Trentino per la realizzazione di progetti di innovazione didattica. Al finanziamento hanno partecipato tutti gli Istituti Scolastici coinvolti nel progetto: gli Istituti Comprensivi di scuola elementare e media di Vigolo Vattaro, Cles, Dro, l'ITCG e Industriale "A. Pilati" di Cles, il Liceo “A. Rosmini” di Trento, il Liceo Scientifico “G. Galilei” di Trento, il Liceo Scientifico “L. da Vinci” di Trento. Inoltre il progetto ha avuto la collaborazione e il cofinanziamento del Dipartimento di Matematica dell’Università di Trento e dell’IPRASE del Trentino.

Le attività proposte agli studenti hanno fatto riferimento alle schede e ai materiali in corso di pubblicazione nel testo "Problemi di massimo e di minimo" Mimesis Edizioni 2009 Collana Quaderni di laboratorio dei prof. **Domenico Luminati e Italo Tamanini** del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

Questo progetto è stato realizzato grazie al contributo dei docenti:

Cristina Bonmassar, Liceo “Leonardo Da Vinci” - Trento

Maria Vittoria Cicinelli, Istituto Comprensivo Trento 5

Elena Cosser, Istituto Comprensivo Vigolo Vattaro

Giancarlo Dorigotti, ITCG "Fontana" - Rovereto

Patrizia Franzoni, Liceo “Antonio Rosmini” Trento

Paola Lionello, Istituto Comprensivo "Nuova Europa" Dro

Maddalena Litterini, Liceo Scientifico “Galileo Galilei” Trento

Giuliana Scarpa,Istituto Comprensivo Vigolo Vattaro

Roberta Scarpa, Liceo “Antonio Rosmini” - Trento

Fulvio Torresani, ITCG e Industriale "Antonio Pilati" - Cles

L'Istituto capofila del progetto è stato il Liceo Scientifico “Galileo Galilei” Trento. Un ringraziamento particolare al dirigente prof. **Aldo Gabbi** che ha assunto la responsabilità di Istituto capofila permettendo la realizzazione della rete di Istituti, nonché alla assistente amministrativa **Franca Baldessari** che ha seguito con efficienza e pazienza gli aspetti finanziari del progetto.

Hanno supportato gli aspetti organizzativi e contribuito a valorizzare gli aspetti didattici del progetto la prof. **Antonia Romano** dell'IPRASE e la dott. **Elisabetta Ossanna** del Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento.

[1] Come previsto dal bando il cofinanziamento della Fondazione Cassa di Risparmio di Trento e Rovereto non poteva superare il 70% del costo complessivo del progetto. Inoltre la retribuzione per attività extra-curriculari degli insegnanti, coinvolti nella programmazione e nella realizzazione del progetto, non poteva superare i 40€/ora lordi e il 40% del costo complessivo del progetto

Presentazione del progetto “Matematica in laboratorio”

Antonia Romano, Iprase del Trentino

Il progetto di ricerca azione “Matematica in laboratorio” è nato da esigenze comuni ad un gruppo di insegnanti di diverso ordine di scuola, che hanno condiviso momenti di riflessione sull’insegnamento della matematica, prendendo spunto dalla possibilità di sperimentare materiali progettati dai responsabili del Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica del Dipartimento di Matematica dell’Università di Trento. I ricercatori del Laboratorio hanno curato la progettazione e la realizzazione di uno dei “laboratori itineranti” sviluppati dal centro *matematita*, nell'ambito di un'azione specifica prevista dal progetto “Lauree Scientifiche”. Le attività proposte riguardano problemi di massimo e minimo e prevedono l'utilizzo di materiali interattivi, schede di lavoro, pannelli e animazioni virtuali. Il laboratorio è stato pensato per il triennio della scuola secondaria di II grado. Le attività, realizzate nell’ambito del progetto con gli studenti di scuola secondaria di primo grado e con gli studenti del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado, sono state opportunamente adattate, con eventuali integrazioni e modifiche. Gli argomenti trattati sono infatti generalmente presenti, a vari livelli di approfondimento, nelle programmazioni dei docenti di tutti i livelli della scuola secondaria.

Il desiderio comune a tutti i partecipanti è stato cercare di **rendere interessante e coinvolgente** una disciplina troppo spesso considerata ostica e riservata a pochi, riuscendo anche a comunicarne la bellezza.

La progettazione è stata supportata attraverso momenti di **formazione** presso il Dipartimento di Matematica dell’Università degli Studi di Trento, momenti di **dialogo e confronto** tra docenti appartenenti a diversi ordini di scuola, momenti di **progettazione condivisa** tra docenti dello stesso ordine di scuola, **incontri con esperti allargati** ad altri docenti della scuola trentina. Il progetto ha aperto la strada per la costituzione di un gruppo di docenti di scuola secondaria di primo e secondo grado che, incontrandosi, hanno potuto avviare un dialogo tra insegnanti di diverso ordine di scuola iniziando a costruire percorsi di continuità tra segmenti scolastici troppo spesso vissuti dagli studenti e percepiti dalle famiglie come mondi distinti e separati.

I docenti che hanno aderito al progetto hanno usufruito di un ambiente collaborativo in rete, della consulenza e supervisione da parte di esperti del Dipartimento di Matematica dell’Università di Trento (in particolare il Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica), che hanno anche supportato un percorso di autoformazione e formazione, per gli insegnanti, specificamente mirato all’utilizzo del laboratorio per “fare matematica”. Gli stessi docenti potranno essere punti di riferimento (alcuni di loro lo sono già) presso il proprio istituto per tutti i colleghi che vorranno orientare la propria programmazione verso la costruzione di competenze in ambito matematico basate sull’esperienza in laboratorio.

Le ricerche in corso in didattica della matematica e le molteplici esperienze di divulgazione recentemente compiute, non solo in Italia, indicano con sempre maggiore chiarezza la necessità sia di mettere l'accento su un livello informale di apprendimento quale prerequisito per qualunque successiva acquisizione di sapere più formalizzata, sia di un attivo coinvolgimento degli studenti nella costruzione dei concetti della matematica.

In tale prospettiva si è ritenuto importante valorizzare un approccio didattico attraverso il *Laboratorio di matematica,* inteso come situazione in cui fare, a diversi livelli, esperienza diretta di “fatti matematici”, in un contesto che stimola la creatività e la curiosità, offre nuove motivazioni e permette di collegare la matematica con la realtà, dando nel contempo la possibilità agli insegnanti di riprendere queste esperienze e di legarle in modo più stretto al curriculum scolastico, ma anche di gettare uno sguardo su nuovi territori che nel normale percorso di studi rimangono pressoché inesplorati. Il *Laboratorio di Matematica* diventa così il "luogo" in cui studenti e docenti *fanno* matematica e più precisamente

> "un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici [...] in qualche modo assimilabile alla bottega rinascimentale, nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando fra loro e con gli esperti" (Matematica 2003 - Unione Matematica Italiana)

e nel quale

> "la costruzione di significati [...] è strettamente legata, da una parte, all'uso degli strumenti utilizzati nelle varie attività, dall'altra, alle interazioni tra le persone che si sviluppano durante l'esercizio di tali attività." (Matematica 2003 - Unione Matematica Italiana)

Il progetto è stato inoltre realizzato partendo dalla condivisione delle finalità educative della Comunità Europea, che sono state colte come un invito a ripensare la programmazione curricolare, orientandosi verso l'apprendimento partecipato e costruito a partire dall'esperienza e in particolare dal laboratorio.

Ogni attività è stata quindi progettata e sperimentata all'interno di percorsi didattici finalizzati a contestualizzare lo studio della matematica in esperienze di laboratorio diversificate in modo da far emergere strutture concettuali comuni nel rispetto dei diversi stili di apprendimento, introducendo comunque modalità di insegnamento e di apprendimento più interattive e coinvolgenti. È infatti convinzione diffusa che l'insegnamento della matematica, a tutti i livelli scolari, soffra da tempo di problemi che ne riducono drasticamente l'efficacia, soprattutto quando questa viene misurata sul lungo periodo. Una delle cause, certamente non l'unica, è imputabile alla diffusa passività nell'apprendimento della matematica stessa, ed alla difficoltà (degli studenti, ma spesso anche dei docenti) di collegare le tematiche trattate dalla disciplina ai problemi del mondo reale, riducendo l'apprendimento all'acquisizione mnemonica di formule e procedure automatiche.

Il coinvolgimento nel progetto di enti (Istituti Scolastici, Università, IPRASE) che, a diverso titolo, operano nel campo della formazione, della ricerca e della sperimentazione, rappresenta un valore aggiunto alla ricerca – azione, consentendo di coniugare la finalità formativa e la finalità educativa della scuola. La possibilità di interazione dei docenti con tali istituti ha permesso di costruire una rete sul territorio che si è allargata ben oltre il coinvolgimento delle sole scuole partecipanti al progetto.

Il cofinanziamento da parte della Fondazione CARITRO ha reso possibile, oltre al riconoscimento anche economico di almeno una parte delle ore dedicate dai docenti a tutte le attività di progettazione, documentazione, riflessione condivisa, anche la duplicazione dei materiali per realizzare le attività di laboratorio all'interno dei singoli istituti partecipanti. Tale duplicazione è stata curata dal Laboratorio di Didattica e Comunicazione della Matematica, realizzata dalle officine della Facoltà di Scienze e cofinanziata dal Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento. La struttura organizzativa del Dipartimento ha permesso la prenotazione e la distribuzione alle singole scuole.

La realizzazione di attività in laboratorio ha posto i docenti di fronte a **nuove esigenze valutative**. Accanto alle verifiche orientate a valutare il prodotto degli apprendimenti, si sono necessariamente avviate pratiche di osservazione durante la realizzazione delle attività. Tali momenti rappresentano un presupposto indispensabile per la futura realizzazione di protocolli osservativi destinati alla valutazione anche di processi, condizione necessaria affinché si possa dare senso ad una didattica per competenze. Si legge infatti nella Raccomandazione del Parlamento Europeo e del Consiglio del 18 dicembre 2006 relativa a competenze chiave per l'apprendimento permanente:

> La competenza matematica è l'abilità di sviluppare e applicare il pensiero matematico per risolvere una serie di problemi in situazioni quotidiane. Partendo da una solida padronanza delle competenze aritmetico/matematiche, **l'accento è posto sugli aspetti del processo e dell'attività oltre che su quelli della conoscenza.** La competenza matematica comporta, in misura variabile, la capacità e la disponibilità a usare modelli matematici di pensiero (pensiero logico e spaziale) e di presentazione (formule, modelli, costrutti, grafici, carte).

Nelle pagine che seguono è presentato un resoconto delle attività che sono state realizzate nelle classi coinvolte. I diversi docenti hanno liberamente scelto le modalità di realizzazione delle attività nelle classi e le modalità di documentazione del lavoro svolto.

Il progetto "Matematica in laboratorio", di durata biennale, non può tuttavia considerarsi concluso. Esso infatti rappresenta il punto di partenza per nuove prospettive di lavoro orientate a favorire la costruzione di apprendimenti in ambito matematico, la ricerca didattica, la crescita professionale dei docenti, il confronto tra ordini di scuola diversi, la riflessione sulla costruzione di strumenti di verifica e valutazione realmente efficaci.

Presentazione del laboratorio “Problemi di massimo e minimo”

Domenico Luminati e Italo Tamanini, Dipartimento di Matematica, Università di Trento

Nella nostra attività di docenti - ricercatori - divulgatori di matematica, ci siamo ormai convinti dell’utilità della “sperimentazione con oggetti concreti” nel processo di avvicinamento alle tematiche astratte della matematica. La modalità laboratoriale comporta infatti un coinvolgimento attivo e personale nella costruzione dei concetti e dei metodi e favorisce sicuramente un apprendimento motivato e duraturo.

Per mettersi davvero in gioco ed essere disponibili ad apprendere, e per diventare protagonisti attivi del processo di costruzione del sapere (scientifico e matematico in particolare), serve spesso che “scatti una molla”, che si accenda qualche passione, che si trovino motivazioni e soddisfazioni personali.

Gli oggetti, quando ben congegnati e piacevoli alla vista e al tatto, e le attività sperimentali che si possono costruire intorno ad essi, si prestano ottimamente a fare da mediatori in questo processo: coinvolgono naturalmente, suscitano domande, permettono lo scambio di opinioni, la discussione di ipotesi, la correzione di errori.

È su queste basi e con questi obiettivi che abbiamo progettato, sviluppato e seguito nella realizzazione il laboratorio sui “Problemi di massimo e di minimo”, prodotto dal Centro Interuniversitario *matematita* con il supporto finanziario del Progetto Lauree Scientifiche – Orientamento e formazione degli insegnanti – Matematica[2].

Ma perché un laboratorio sui massimi e minimi?

I concetti di massimo e di minimo sono centrali in matematica e in generale nelle discipline scientifiche. In fisica, ad esempio, le configurazioni di equilibrio di un dato sistema sono spesso descritte in termini di minima energia. Analogamente, i problemi di ottimizzazione sono molto diffusi nelle applicazioni scientifiche e tecnologiche, come ad esempio nella progettazione di strutture che devono offrire la massima resistenza a determinate sollecitazioni.

Naturalmente non si può pensare di poter affrontare compiutamente simili questioni nel normale percorso scolastico. Ci sembra tuttavia importante cercare di avvicinare gli studenti a questi temi fin dai primi anni della scuola secondaria superiore e addirittura prima, proponendo problemi ambientati in un contesto geometrico tutto sommato familiare.

Si hanno così ottime occasioni per mettere a frutto gli strumenti matematici già introdotti, per “testare” la loro piena acquisizione ed eventualmente consolidarli e per motivare l'introduzione di tecniche nuove. Il fatto che i problemi di massimo e di minimo siano spesso strettamente collegati con la realtà fisica offre inoltre l’opportunità di “far toccare con mano” il processo di costruzione di un modello matematico, idoneo a descrivere il fenomeno osservato. Si possono così compiere i passi cruciali di tale percorso, dalla sperimentazione e analisi dei dati alla sintesi dei risultati e alla loro conseguente verifica.

---

2 Testo in corso di stampa: **Luminati Domenico, Tamanini Italo** "Problemi di massimo e di minimo" Mimesis Edizioni 2009 Collana Quaderni di laboratorio

Azioni di questo tipo andrebbero a nostro avviso incoraggiate, anche con l'obiettivo di dare una visione unitaria della matematica, mostrando legami e interazioni tra branche diverse.

Geometria e analisi offrono modi complementari di leggere la realtà e di indagarne la struttura; la loro integrazione non può che aiutare a comprendere meglio i problemi, a individuarne le linee essenziali e gli schemi risolutivi.

Il presente progetto si inserisce a pieno titolo in questa prospettiva. In questi due anni abbiamo seguito con grande interesse il lavoro, sempre attento e consapevole, degli insegnanti che hanno voluto sperimentare le attività nelle loro scuole: un ottimo lavoro, raccontato nelle pagine che seguono, che dimostra come sia possibile reinterpretare le nostre indicazioni e ritagliare alcune proposte effettive da attuare in classe.

Il progetto visto dal dirigente dell'Istituto *capofila*

Aldo Gabbi, dirigente del Liceo scientifico "Galileo Galilei " Trento - Istituto capofila

Il progetto “Matematica in laboratorio” realizzato grazie alla collaborazione in rete di sette Istituti della Provincia di Trento (tre medie e quattro superiori) propone una nuova modalità per l’apprendimento della matematica nella scuola.

I docenti delle scuole secondarie, col supporto dei docenti del dipartimento di matematica della Facoltà di Scienze dell’Università di Trento sono stati protagonisti della ricerca, della realizzazione e della sperimentazione di materiali necessari ad una didattica laboratoriale.

L’obiettivo era ambizioso: cercare di mettere in evidenza l’importanza della matematica in situazioni reali, rendendo semplici e accessibili nozioni di matematica considerate astratte e complesse.

Il laboratorio di matematica si presenta come strutturazione di una serie di indicazioni metodologiche basate sull’uso di strumenti che permettono di apprendere con più facilità i concetti matematici attraverso la sperimentazione e quindi la verifica personale dell’attività didattica proposta.

I laboratori scientifici in generale e quello di matematica in particolare fanno ricorso alla metodologia cosiddetta della “*didattica per problemi*”, metodologia la cui efficacia si basa su molteplici fattori che vanno dall'uso di tecniche di apprendimento che valorizzano la condivisione e la cooperazione al ruolo necessariamente attivo degli studenti nella costruzione del loro sapere.

I vantaggi che vengono dal proporre ai ragazzi con queste modalità il "fare esperienza" di matematica sono: lo sviluppo della capacità di risolvere problemi affrontando situazioni note e meno note, semplici o via via più complesse, e lo sviluppo di adeguati metodi di organizzazione e di comunicazione delle proprie conoscenze.

L’attività laboratoriale stimola lo studente in certe abilità matematiche e lo avvicina in modo piacevole allo studio della matematica facendole superare la fama di disciplina pedante e accessibile a pochi.

L’augurio è che tale esperienza possa proseguire non solo nell’ambito matematico ma in tutti contesti didattici di natura scientifica e non.

"... Ma nel proposito toccato adesso, veramente non credo che tra quelli che mancano di qualche cognizione di geometria se ne trovassero quattro per cento che non restassero a prima giunta ingannati, che quei corpi che da superficie uguale son contenuti, non fussero ancora in tutto eguali; sì come nello stesso errore incorrono parlando della superficie, che per determinar, come spesse volte accade, delle grandezze di diverse città, intera cognizione gli par d'haverne qualunque volta sanno la quantità de i recinti di quelle, ignorando che può un recinto essere eguale a un altro, e la piazza contenuta da questo assai maggiore della piazza di quello: il che accade non solamente tra le superfici irregolari, ma tra le regolari, delle quali quelle di più lati son sempre più capaci di quelle di manco lati, sì che in ultimo il cerchio, come poligono di lati infiniti, è capacissimo sopra tutti gli altri poligoni di egual circuito; ...".

G. Galilei, "Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze".
Circa a metà della Giornata prima, vicino a disegni di esagoni e cilindri. Parla Sagredo.
EINAUDI Torino 1990 pag. 67

Presentazione delle esperienze in classe degli insegnanti

Scuola secondaria di primo grado

Maria Vittoria Cicinelli, Istituto Comprensivo Trento 5

Giuliana Scarpa, Istituto Comprensivo Vigolo Vattaro

Paola Lionello, Istituto Comprensivo "Nuova Europa" Dro

Elena Cosser, Istituto Comprensivo Vigolo Vattaro

Attività su problemi isoperimetrici e di area minima[3]

Spago, geopiano, cartoncino: lavorando con rettangoli isoperimetrici

Maria Vittoria Cicinelli, Istituto Comprensivo Trento 5

Il lavoro viene proposto ad una classe seconda della scuola secondaria di primo grado di Cles. La progettazione dell'insegnante è stata accompagnata da una docente che lavora presso IPRASE e la sperimentazione è stata accompagnata da momenti in cui in aula è stata presente la stessa docente IPRASE come osservatore esterno. La raccolta delle osservazioni centrate su aspetti metodologici ha consentito di reindirizzare di volta in volta l'azione didattica.

La prima azione che si svolge in classe è la richiesta di scrivere brevemente ed individualmente cosa si pensa della matematica.

Di seguito è riportata la raccolta delle opinioni dei ragazzi.

1. Per me la matematica non è né difficile né facile. La matematica serve per tutto. A me la matematica non mi piace tanto.
2. Per me la matematica è una materia bella, interessante ed importante. Non è molto difficile, se la capisci diventa facile. La cosa che serve di più nella matematica è la logica.
3. La matematica è bella perché è complessa, però è un po' difficile, ma serve.
4. Penso che la matematica sia molto difficile, ma molto importante nella vita. La cosa più noiosa sono le espressioni, meglio i problemi che mi fanno capire che in fondo mi piace la matematica.
5. Io penso che la matematica sia difficile ma in certe cose ci si può anche divertire.
6. Per me la matematica è una materia difficile ma nella vita ci serve molto.
7. Secondo me la matematica è molto difficile. La cosa che mi crea problemi sono i problemi di matematica. Quando mi metto lì per farli non ci capisco più niente. Tante volte ho preferito che la matematica non esista. Altre volte invece no. Quando capisco i procedimenti, allora in quei casi mi diverto anche.
8. Per me la matematica non è facile, è così e così. Si devono imparare tante cose ed è bello imparare cose nuove. Per me è la seconda materia mia preferita.
9. Io penso che la matematica sia bella, ma il problema è che non la capisco. Alle elementari è più facile, poi alle medie si complica tutto.
10. Io penso che la matematica sia una cosa facile per chi la studia. La matematica non è molto brutta. Molti argomenti di questa materia sono interessanti, altri un po' noiosi. La matematica nella vita serve a molto. La matematica un po' mi piace, ma solo quando non è noiosa.
11. A me la matematica non è mai piaciuta, né alle elementari, periodo in cui studiavamo e lavoravamo argomenti più facili, né alle medie, periodo in cui stiamo lavorando argomenti più difficili. Ma io comunque la considero utile, perché se mai la matematica viene considerata generalmente la materia più importante. Per me fare espressioni, problemi, equazioni non è divertente come dice la mia professoressa, io mi annoio comunque è noioso, anche se la trovo facile perché si basa sulla logica e si trova comunque una risposta.
12. Io penso che la matematica non sia difficile ma è molto utile nella vita. Se però non si fa esercizio diventa difficile e noiosa.
13. Cosa penso della matematica? È bella, divertente, serve nella vita, mi coinvolge, la amo.
14. La matematica per me è abbastanza facile. Non vorrei che la mia prof se ne andasse perché mi fa amare quello che sto studiando. Spero che anche lei si trovi bene con me come io con lei. Comunque la matematica forse mi piace anche perché sto bene con lei. Ma mi piace soprattutto quando riesco a risolvere le cose, quando non ci riesco mi annoio e la trovo un po' antipatica, la matematica non la prof.
15. Per me la matematica è difficile anche se penso che nella vita mi servirà sempre. A me della matematica non piacciono i problemi perché non riesco a risolverli sempre.
16. La matematica mi piace anche se, a volte, mi risulta difficile seguire la sua evoluzione.
17. A me la matematica non piace, infatti preferisco italiano. La matematica è difficile e io non sono portato, sono come mia madre che mi ha detto che lei non ci ha mai capito niente. Quindi io non ci ho mai messo impegno a

---

[3] Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 3.

studiarla e neanche a stare molto attento. Mi fa anche venire il mal di pancia quindi la matematica nuoce alla salute.

18. A me della matematica piace tutto, ma proprio tutto tutto.
19. La matematica a me piace. A volte non capisco ma la curiosità è maggiore e forse per questo è la mia materia preferita. Anche se magari è un po' difficile, se ci metti impegno e un po' di logica, ne vieni fuori, riesci a starle dietro. Il bello è che certe volte è così divertendo che non ti accorgi che stai studiando o facendo calcoli matematici. Diventa come un gioco e quindi piacevole ed interessante.
20. La mia materia preferita è la matematica. Mi piace perché ti costringe a ragionare molto e a furia di ragionare si impara ad essere logici. La cosa più semplice è risolvere espressioni, ma lì la logica c'entra poco. I problemi più sono difficili più ti costringono a ragionare e quindi ti allenano il cervello. La matematica per me è un mondo tutto da scoprire.
21. La matematica è difficile ma al tempo stesso utile. Non mi piace l'aritmetica, preferisco la geometria è più concreta e stimola la fantasia.

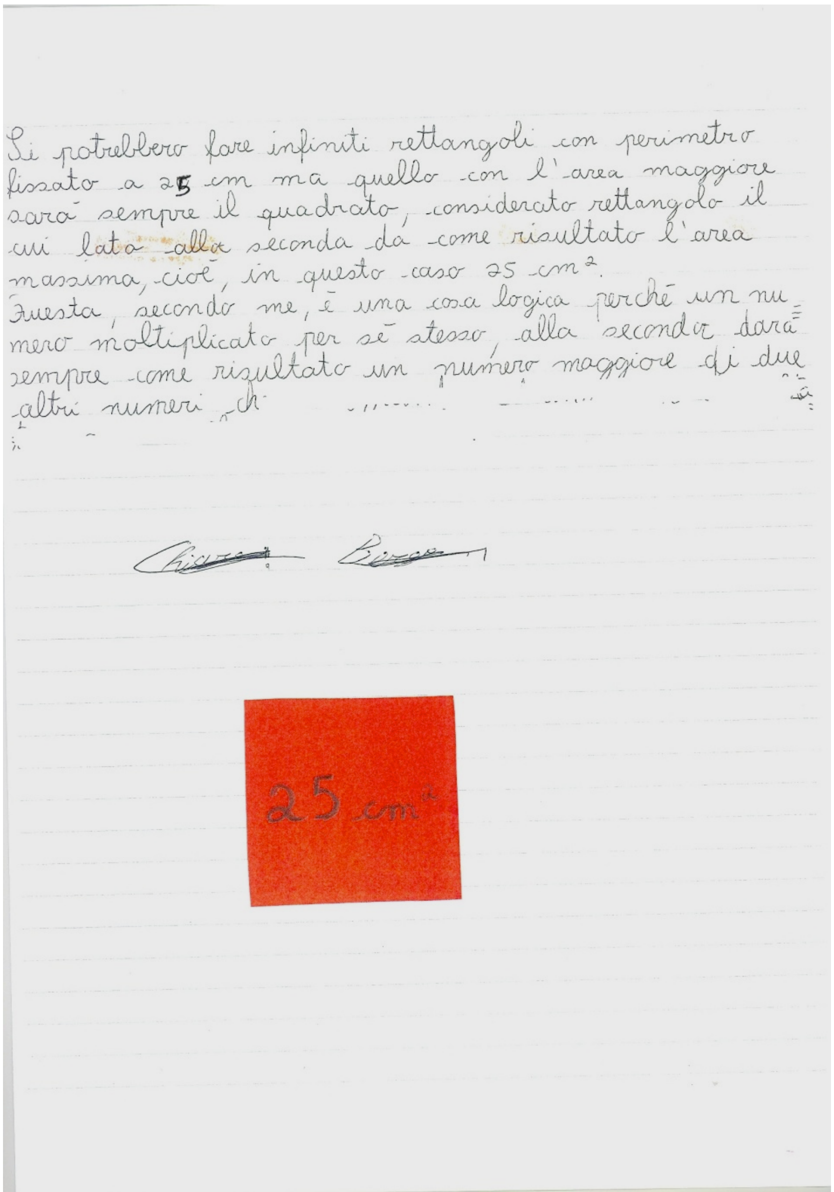
Per l'attività di laboratorio, la classe, composta da 22 alunni, è organizzata in coppie eterogenee stabilite dall'insegnante. Due gruppi sono costituiti da tre ragazzi, in uno di questi gruppi è inserito un'alunna certificata in base alla legge 104/92, nell'altro un'alunna non italofona e di recente immigrazione. Il criterio di eterogeneità riguarda il sesso e il livello di padronanza della disciplina. Per favorire interdipendenza positiva si ricorre a:

- consegna di un unico foglio A3 a disposizione ed un geopiano;
- posizione dei componenti la coppia in modo che l'interazione avvenga di fronte;
- collocazione di ogni coppia in una posizione che rimane invariata.

I geopiani sono stati realizzati dai ragazzi utilizzando tavolette di compensato e chiodi, dopo aver eseguito una quadrettatura della tavoletta manualmente. Tale attività è stata anche un utile esercizio di misura.

L'insegnante scrive alla lavagna la domanda: "due o più rettangoli che hanno lo stesso perimetro hanno la stessa area?". La maggior parte dei ragazzi risponde automaticamente sì. L'insegnante fornisce ad ogni gruppo di lavoro dello spago e chiede di rispondere alla domanda utilizzando il geopiano. Non hanno a disposizione strumenti di misura. possono utilizzare lo spago e il geopiano.

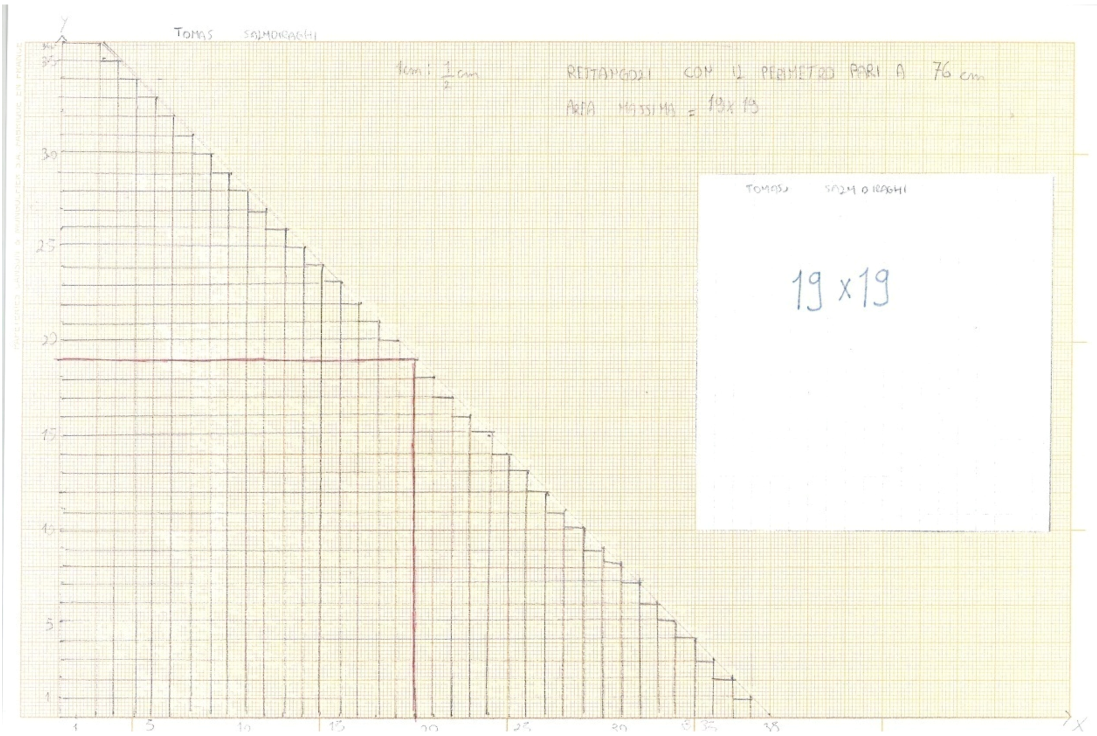
L'insegnante propone di utilizzare il foglio a disposizione per scrivere le eventuali riflessioni. All'interno di ogni gruppo si decide quanti rettangoli costruire e di quale perimetro. Tutti i ragazzi scelgono di utilizzare come unità di misura per la lunghezza del perimetro il lato di un quadratino del geopiano. Tutti lavorano molto ordinatamente. L'insegnante interviene quando e dove si accorge che ci sono difficoltà nella costruzione del rettangolo sul geopiano, altrimenti osserva il lavoro dei gruppi. Poiché lo spago è tutto di un colore, bisogna trovare il modo di poter distinguere i diversi rettangoli; l'insegnante chiede il parere a tutta la classe. Discutendo i ragazzi giungono all'accordo di colorare con un pennarello di colore diverso lo spago che delimita i diversi rettangoli. L'insegnante non ha dato alcuna indicazione su come debbano essere costruiti i rettangoli, lasciando loro piena libertà di azione. Durante lo svolgimento del lavoro manuale si osserva che i ragazzi sono piuttosto lenti ed un po' impacciati. Discutono all'interno delle coppie sulla lunghezza del perimetro da scegliere. Tutti concordano che è necessario costruire rettangoli aventi lo stesso perimetro, ma diversa "forma" sul geopiano. Sono tutti d'accordo sulla necessità di andare poi a misurare sul geopiano l'area di ogni rettangolo costruito e scrivere le osservazioni, specificando anche come hanno misurato l'area. Durante il lavoro si osserva che tutti contano i quadratini del geopiano, nessuno ricorre all'uso della formula per calcolare l'area. La conclusione a cui si giunge è che **rettangoli isoperimetrici non hanno la stessa area**. A questo punto l'insegnante pone la domanda "fissato un perimetro, quanti rettangoli di quel dato perimetro è possibile costruire?". In coro i ragazzi rispondono "infiniti" e poi una ragazza spiega: "con lo stesso perimetro, basta cambiare le misure della base e dell'altezza e puoi avere un numero infinito di rettangolo". Un ragazzo dice “perché i lati sono segmenti e nei segmenti c’è un numero infinito di punti”. L’insegnante pone un’altra domanda: “tra tutti i rettangoli isoperimetrici di un dato perimetro, qual è, secondo voi, quello di area massima?”. Per rispondere alla domanda, in ogni coppia si discute su quale deve essere il valore del perimetro da prendere in considerazione. Molti gruppi di lavoro, dopo aver stabilito il valore del perimetro e costruito i rettangoli sul geopiano, completano una tabella, giungendo alla conclusione che, assegnato un determinato valore di perimetro, il quadrato è il rettangolo di area massima. Per tutti la sorpresa è considerare il quadrato un rettangolo.


Si potrebbero fare infiniti rettangoli con perimetro fissato a 25 cm ma quello con l'area maggiore sarà sempre il quadrato, considerato rettangolo il cui lato alla seconda dà come risultato l'area massima, cioè, in questo caso 25 cm².
Questa, secondo me, è una cosa logica perché un numero moltiplicato per sé stesso, alla seconda darà sempre come risultato un numero maggiore di due altri numeri ch

25 cm²

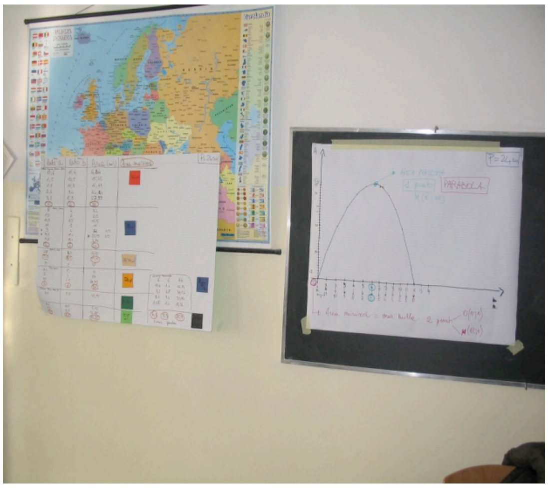
L’insegnante chiede di disegnare su fogli di carta millimetrata i rettangoli costruiti sul geopiano. Sono già abituati a lavorare sul piano cartesiano e l’insegnante suggerisce di utilizzare, per comodità, solo il primo quadrante. Un ragazzo interviene e afferma:”allora è più comodo considerare tutto il foglio come se fosse il primo quadrante!”

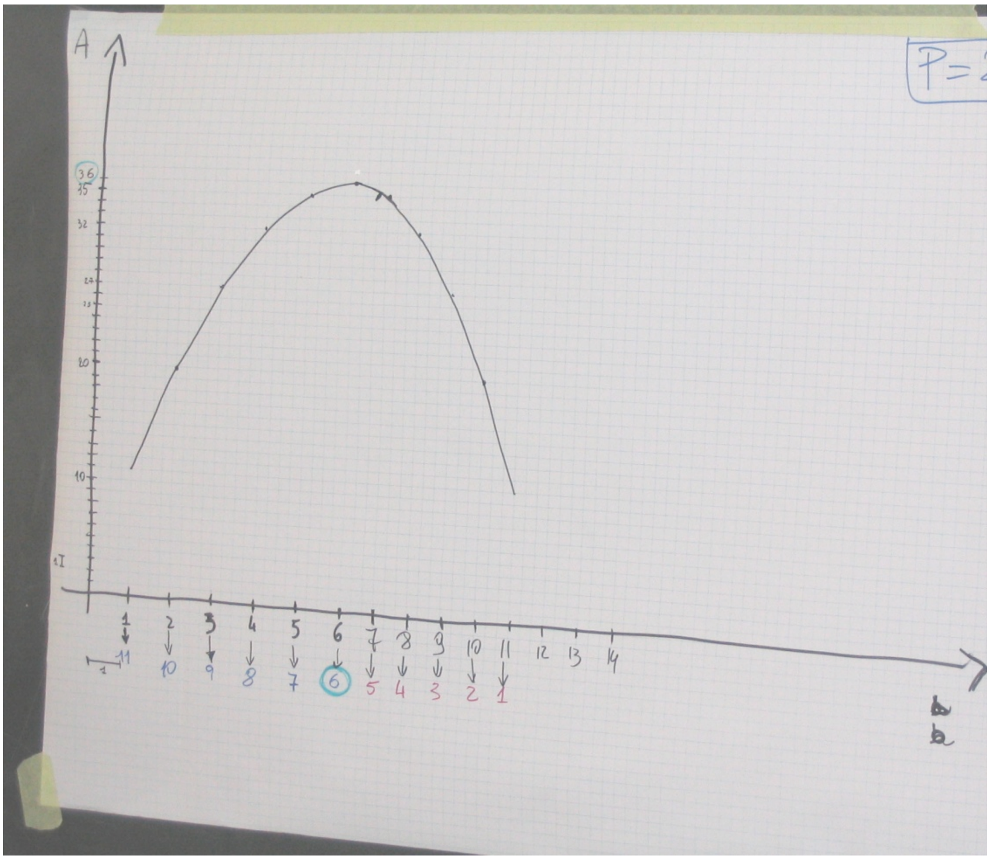
L’insegnante chiede di disegnare i rettangoli in modo che ognuno di essi abbia un vertice nell’origine degli assi. Il vertice che si trova nel quadrante andrà indicato con un a lettera e ne andranno indicate le coordinate cartesiane. L’insegnante chiede “cosa otteniamo se congiungiamo i punti di cui avete trovato le coordinate cartesiane?”

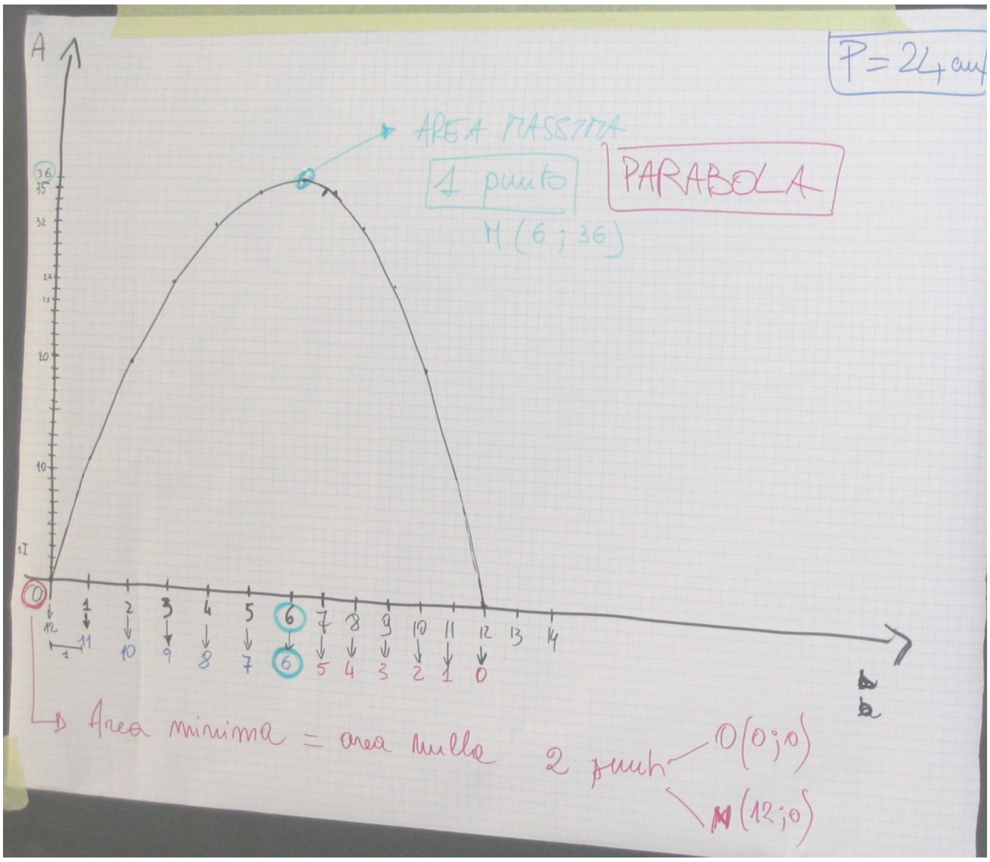


Il lavoro prosegue utilizzando cartoncini colorati, che vengono distribuiti alle coppie. L’insegnante propone di ritagliare rettangoli di perimetro P=25 cm. Dopo un primo momento in cui si osserva un po’ di agitazione tra i banchi perché vogliono scegliere un colore piuttosto che un altro, il clima ritorna sereno e collaborativo. Durante il lavoro si osserva che hanno molta difficoltà nell’utilizzare le forbici per ritagliare con precisione. Procedono molto lentamente e con incertezza nel lavoro manuale. L’insegnante propone di incollare i rettangoli colorati nel primo quadrante di un piano cartesiano, facendo in modo che ogni rettangolo abbia un vertice nell’origine degli assi e chiedendo ai ragazzi di trovare una disposizione conveniente dei rettangolini. Anche in questo modo riescono a ricostruire la retta che congiunge i vertici dei rettangoli che si trovano nel piano cartesiano. Ancora qualche ragazzo ha difficoltà a riconoscere il quadrato come rettangolo.

Si costruiscono alcuni cartelloni di classe dopo un’interessante discussione su quale potrebbe essere l’area minima:




A
36
35
32
20
10
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
b



L'insegnante pone quindi il problema duale: "tra tutti i rettangoli di area uguale, qual è quello che ha il perimetro minimo?"

Procedendo con le stesse modalità utilizzate per il problema precedente (uso del geopiano, della carta millimetrata e dei cartoncino colorati) i ragazzi giungono a concludere che tra tutti i rettangoli equivalenti, quello che ha il perimetro minimo è il quadrato. A questo punto nessuno ha più dubbi sul fatto che il quadrato sia un rettangolo. Il lavoro manuale, man mano che si procede, diventa più snello ed i ragazzi sembrano meno impacciati. La scoperta che il quadrato è il rettangolo che, a parità di area, ha il perimetro minimo, suscita meno stupore della scoperta che rettangoli isoperimetrici hanno aree diverse.

Il lavoro si conclude con alcuni commenti dei ragazzi, che sono riportati di seguito:

1. Per me lavorare con il geopiano è stato molto interessante ed utile perché ho capito che lavorando con esso si capisce meglio e soprattutto si possono rappresentare le figure in modo più chiaro. Ho capito ed ho ragionato su argomenti che ho potuto vedere concretamente giungendo ad una soluzione logica che diventa ovvia perché rappresentata sul geopiano. Infine ho capito che figure isoperimetriche non sono necessariamente anche equivalenti. Ho cioè capito bene alcune cose sulle quali, se non ci fosse stato il lavoro concreto, avrei sicuramente avuto dubbi e incertezze.
2. La lezione di ieri per me è stata molto piacevole anche perché ho capito che due rettangoli che hanno lo stesso perimetro non è detto che hanno la stessa area per forza.
3. Il lavoro che abbiamo fatto nelle ore di matematica è stato molto interessante e ci ha fatto scoprire cose nuove sui rettangoli e sui quadrati che poi sono anche loro rettangoli.
4. La lezione di ieri per me è stata molto piacevole ed ho capito che due rettangoli con lo stesso perimetro non hanno per forza la stessa area, così come rettangoli con area uguale non devono avere lo stesso perimetro.

5. Oggi ho scoperto come uno strumento come il geopiano ci può essere utile per trasformare le figure geometriche giocando con loro e costruendone diverse. Tutto è cominciato con la costruzione del geopiano e poi lavorando con questo strumento e semplici pezzi di spago abbiamo fatto scoperte geometriche interessanti come il fatto che due rettangoli con stesso perimetro non devono avere per forza la stessa area e che un quadrato è un rettangolo, anzi, tra i rettangoli isoperimetrici è quello che ha area maggiore. È stato un lavoro bellissimo.
6. Il lavoro fatto con geopiano prima e carta millimetrata poi è stato interessante, un modo diverso e divertente per fare matematica, anzi per imparare la matematica facendo lavori manuali.
7. Lavorando come se fossimo in un laboratorio, abbiamo capito cose che non avremmo capito così bene senza strumenti come il geopiano, i cartoncini colorati e la carta millimetrata. Questo significa che in matematica le cose si possono anche imparare ma questo non vuol dire che si capiscono sempre. Si capiscono meglio e si imparano meglio solo se le vedi.
8. Il lavoro che abbiamo fatto è stato utile e molto interessante, ci ha fatto scoprire cose in modo un po' diverso dal solito. Molto interessante è stata la costruzione della retta utilizzando i rettangoli colorati.
9. Il lavoro fatto come se fossimo in un laboratorio, oltre ad essere interessante, ci ha fatto scoprire come la matematica può diventare meno difficile se si costruiscono le cose. Molto importanti sono stati poi i momenti in cui abbiamo potuto discutere sulle domande che ci venivano chieste. In questo modo sembra che il tempo nelle ore di matematica corre più velocemente.
10. Il lavoro che abbiamo fatto mi è piaciuto molto perché ci ha fatto costruire cose importanti per capire la matematica ma anche perché noi del gruppo abbiamo lavorato aiutandoci e stavamo bene insieme.

La verifica finale individuale è stata eseguita correttamente dall'87% degli alunni.

Si riporta un esempio di verifica proposta.

3

IL LABORATORIO MATEMATICO NELLA DIDATTICA

VERIFICA

Data: .... Alunno/a: ....

- **in generale, fra tutti i rettangoli con perimetro fissato, qual è quello di area massima?** Motiva la tua risposta.

Il ~~[illegible]~~ quadrato perché l'area del quadrato si misura lato alla seconda e di conseguenza l'area sarà la misura di un lato x un altro lato. È sempre maggiore l'area di un rettangolo che ha i lati uguali (quadrato) perché il lato per calcolare l'area viene moltiplicato alla seconda e l'area sarà sempre maggiore di un rettangolo che ha i lati diversi perché essi devono essere moltiplicati tra di loro e non daranno mai come risultato un numero maggiore dell'area del quadrato.

- Disegna ora sul grafico cartesiano almeno quattro rettangoli di area 36 cm^2, in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.

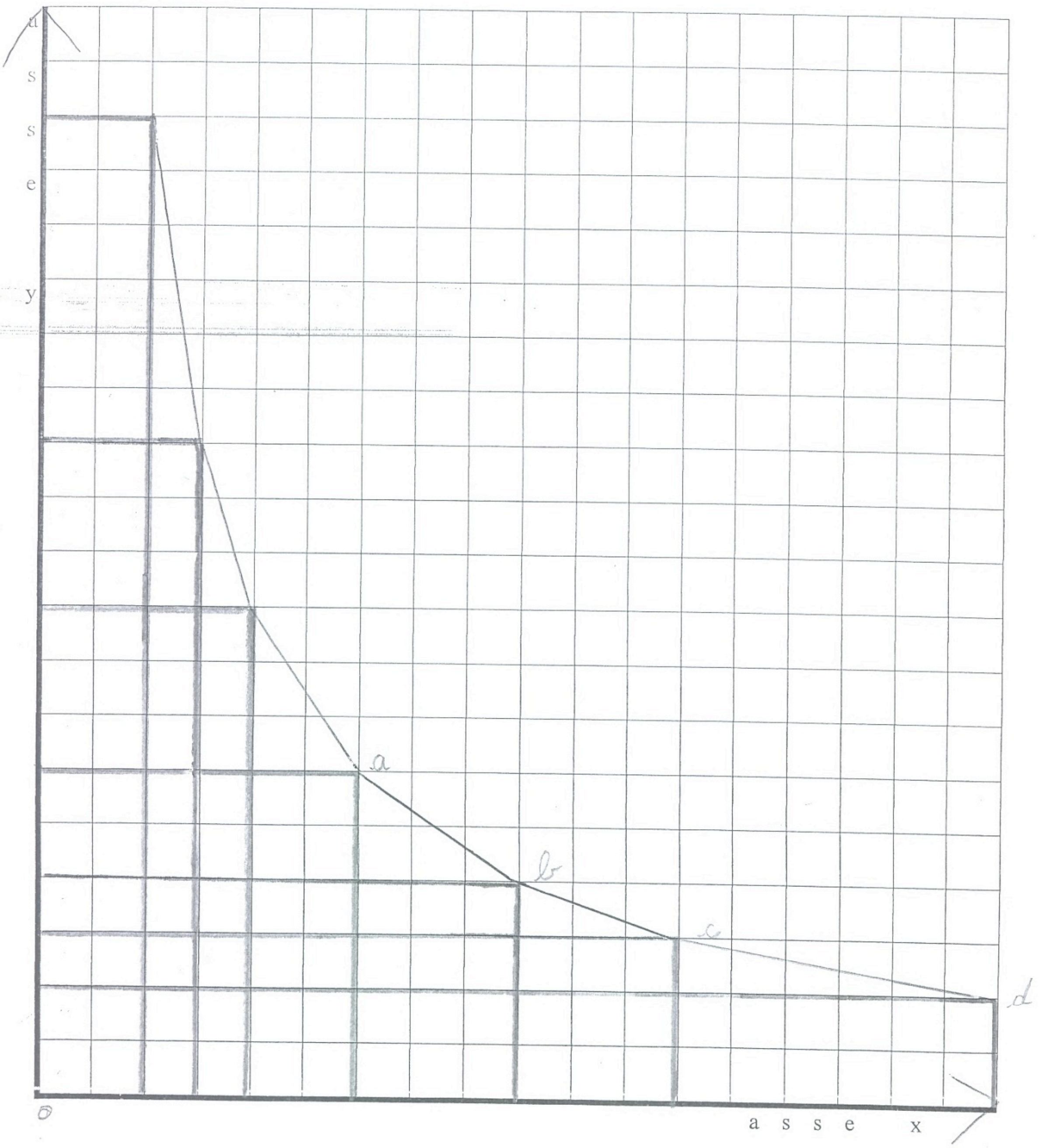
- Descrivi come sono disposti i vertici liberi A, B, C, D…

In modo da formare un iperbole equilatera perché ha una proporzione inversa. $K=\frac{Y}{X}$

- Quale tra i rettangoli disegnati ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta.

Il quadrato perché esso avendo tutti i lati uguali e x trovare il perimetro bisogna sommarli si arriverà sempre al perimetro minimo perché i lati più differenza di misura hanno tra di loro ~~[illegible]~~ si arriverà a un perimetro sempre più alto

1



▸ **In generale, fra tutti i rettangoli di area fissata, qual è quello di perimetro minimo?**

sul foglio dietro

Problemi Isoperimetrici e di area minima alla scuola media di Vigolo Vattaro

Giuliana Scarpa, Istituto Comprensivo Vigolo Vattaro

Osservazioni

Prima di iniziare l'attività ho cercato di rispondere alle seguenti domande:

qual è il valore aggiunto di questa attività per i ragazzi e per me?

Premettendo che il libro di testo utilizzato contiene già un percorso simile, lo svolgimento di questa attività si può vedere come un esercitazione pratica da svolgere prima di iniziare il percorso più strutturato. I ragazzi trovano quindi maggior motivazione avendo a disposizione materiale significativo su cui operare e riflettere.

Il docente, con questa metodologia didattica (lavoro tra pari a gruppi), riesce a stimolare la partecipazione di tutti i ragazzi e concedersi tempi un po' più lunghi per parlare con i singoli.

Come ottimizzare il mio tempo ed energia?

Ho pensato che dovevo organizzarmi per ottenere una buona efficienza del mio lavoro e avere delle indicazioni da fornire ad altri docenti qualora volessero seguire questo percorso. Ho quindi lavorato cercando di mantenere il contatto con il libro di testo e proponendo ai ragazzi lo svolgimento degli esercizi sul libro come compiti a casa. Inoltre ho utilizzato in parte la verifica del libro.

Gli alunni hanno dimostrato entusiasmo per lo svolgimento dell'attività pratica, come sempre quando vivono situazioni didattiche con attività di gruppo.

Alcuni sono stati meno partecipi nei momenti di riflessione, penso per la difficoltà dell'argomento proposto. Come sempre succede, alcuni alunni non riconoscono la valenza dell'attività proposta: ad alcuni sembra che non sia vera matematica quella che non ti fa svolgere e risolvere un problema senza l'utilizzo di formule matematiche. Per quanto la scrivente lavori sempre in modo costruttivo, permane in taluni la convinzione che fare matematica sia la pura applicazione di regole e formule proposte dal docente o dal libro. Ascoltano i commenti si può percepire a volte che questo modo di pensare faccia parte dei **luoghi comuni** assimilati anche dal contesto familiare.

La verifica è andata bene. Ho lasciato trascorrere del tempo prima di somministrarla per permettere che l'apprendimento si sedimentasse. Anche se a volte i ragazzi dotati di buona memoria rispondono bene ai quesiti perché si avvalgono più di essa che di un reale lavoro di rielaborazione.

Contesto

scuola	Classi	periodo	Tipologia ore utilizzate
I.C. Vigolo Vattaro	2 A (20 studenti) classe vivace e disponibile a lavorare in gruppo. È abituata a condividere con l'insegnante la motivazione al lavoro.	Anno scolastico 2007/2008	curricolari

Modalità di lavoro

Gruppi	Modalità presentazione schede	Registrazione dell'attività da parte degli studenti	Eventuale compresenza di colleghi
5 gruppi da 4 studenti scelti dall'insegnante	B1 mod	di gruppo	nessuna

Scheda B1 Modificata

B1 Perimetro e area dei rettangoli (Tempi: 2 lezioni da 48 minuti)

1. I due rettangoli di plexiglas hanno lo stesso perimetro.

   Se si indica con R l'area del rettangolo rosso e con B quella del rettangolo blu, secondo te quale delle seguenti affermazioni è vera?

   ☐ R > B

   ☐ B > R

   ☐ B = R

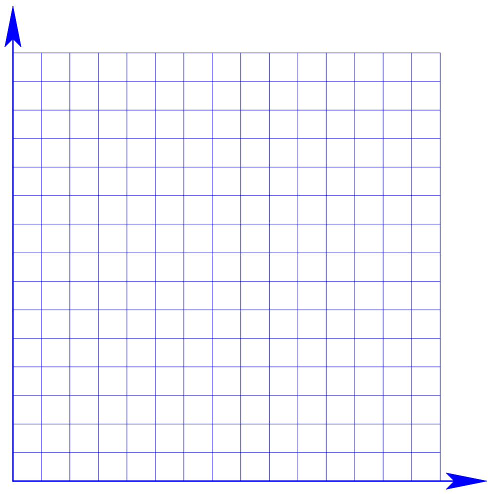
   Motiva la tua risposta.

   ____

   ____

   ____

2. Disegna sul foglio a quadretti tre diversi rettangoli di perimetro 28 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.



   Come sono disposti i tre vertici opposti all'origine?

   ____

   ____

   ____

3. Scegli ora un punto qualsiasi sul segmento con estremi nei punti di coordinate (14;0) e (0;14). Costruisci il rettangolo che ha un vertice in quel punto, un altro vertice nell'origine ed i lati paralleli agli assi.

Quanto vale il perimetro di questo rettangolo?

____

____

____

____

4. Qual è il rettangolo di perimetro 28 che ha area massima? Motiva la tua risposta, dopo aver misurato le varie aree e riempito la tabella:

base	**altezza**	**area**

In generale, fra tutti i rettangoli con perimetro fissato, qual è quello di area massima? Fai qualche considerazione:

____

____

____

____

5. Disegna ora sul foglio a quadretti alcuni rettangoli di area 36 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. Potresti partire da un rettangolo con la base lunga 1 quadretto e altezza 36 quadretti e poi aumentare la base a 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 e diminuire l'altezza relativa.

Fai i calcoli qua sotto:

base	**altezza**	**area**
1	36	36 1 = 36
2		
3		
4		
6		
9		
12		
18		

Quale curva descrive il vertice opposto all'origine? Fai qualche considerazione personale

____

____

____

____

____

6. Qual è il rettangolo di area 36 che ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta, dopo aver misurato i diversi perimetri dei rettangoli disegnati sopra e riempito la tabella:

base	**altezza**	**perimetro**
1	36	
2		
3		
4		
6		
9		
12		
18		

In generale, fra tutti i rettangoli di area fissata, qual è quello di perimetro minimo?

____

____

____

____

____

____

Di seguito si riportano le risposte che gli alunni hanno dato e si allegano due esempi di lavoro eseguito dagli alunni:

RISPOSTE DEGLI ALUNNI

punto 1.

1° gruppo: dopo la sovrapposizione hanno misurato il pezzo dell'altezza blu che sporgeva e lo hanno confrontato con la parte della base rossa che sporgeva. Hanno notato che avanzava spazio

2° gruppo: non hanno effettuato alcuna misurazione, si sono accontentati della loro percezione visiva.

3° gruppo: hanno misurato la lunghezza delle dimensioni e calcolato le due aree.

4° gruppo: non hanno effettuato alcuna misurazione, si sono accontentati della loro percezione visiva.

5° gruppo:hanno disegnato su un foglio la sagoma del rettangolo blu, lo hanno ritagliato e sovrapposto facendo coincidere le due basi, hanno quindi ritagliato la parte sporgente e, confrontandola con il pezzo rosso, si sono accorti che avanzava ancora spazio.

punto 2.

Tutti hanno avuto difficoltà a comprendere la consegna, sostanzialmente a causa della loro cattiva abitudine di leggere frettolosamente. Due gruppi hanno riconosciuto la retta o il segmento.

punto 3.

Due gruppi hanno sbagliato a calcolare la misura del perimetro del rettangolo da loro individuato, questo dimostra che non hanno compreso il significato del lavoro fatto.

punto 4.

Tutti i gruppi hanno risposto correttamente, notando anche che minore è la differenza tra i lati, maggiore è l'area.

punto 5.

Tutti i gruppi, tranne uno,sono riusciti a disegnare agevolmente e a dare una descrizione personale della curva: assomiglia ad un trampolino, ad una pista da skateboard, una curva strana che tende ad impennarsi per diventare una retta.

punto 6.

I quattro gruppi che hanno ultimato il lavoro sono giunti correttamente alla soluzione prima di concludere i calcoli.

Solo un gruppo non ha partecipato con entusiasmo a causa di problemi relazionali interni al gruppo

Si riporta la verifica che i ragazzi hanno svolto individualmente

I.C. Vigolo Vattaro Scuola secondaria 1° grado

Classe 2 A Prof.ssa Giuliana Scarpa

Data:………………………….

Alunno:………………………………………………………

Verifica isoperimetria

1. Se prendo uno spago legato e lo dispongo in diversi modi, tutte le figure che ottengo sono:
   - ☐ a equivalenti
   - ☐ b isoperimetriche

2. Fra tutti i rettangoli che hanno lo stesso perimetro, il quadrato ha l'area:
   - ☐ a minima
   - ☐ b massima

3. Fra i rettangoli costruiti con lo stesso spago, quelli del «caso limite» hanno l'area:
   - ☐ a nulla
   - ☐ b massima

4. Le figure che costruisco con lo stesso numero di quadratini sono:
   - ☐ a equivalenti
   - ☐ b isoperimetriche

5. Fra tutti i rettangoli equivalenti il quadrato ha il perimetro:
   - ☐ a massimo
   - ☐ b minimo

6. Se nel piano cartesiano dispongo a libretto tanti rettangoli di perimetro 20 cm i «vertici liberi» formano:
   - ☐ a un'iperbole
   - ☐ b una retta
   - ☐ c una parabola

7. I «vertici liberi» di tanti rettangoli equivalenti disposti a libretto nel piano cartesiano formano:
   - ☐ a una retta
   - ☐ b una parabola
   - ☐ c un'iperbole

Risultati verifica isoperimetrica

voto	frequenza
Non sufficiente (42%)	2
Sufficiente (57%)	3
Buono (71%)	5
Distinto (86%)	6
Ottimo (100%)	4
Media = 76%	

Analisi dettagliata dei risultati

domanda	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Risposta corretta	20	19	15	18	15	12	7
Risposta non corretta	0	1	5	2	5	**8**	**13**

Considerazioni

il risultato complessivo è superiore al buono.
Come si vede dalle risposte alle prime due domande il concetto di ***isoperimetria è ben assimilato***.

La risposta alla domanda 3 evidenzia la **difficoltà** a capire il concetto di **"caso limite"**, cosa che si è già presentata in altre situazioni. Per taluni ragazzi è veramente difficile considerare l'evento limite come significativo. Si dovrà insistere nel riproporlo e riflettere sul suo valore.

Anche il concetto di **equivalenza** (domanda n° 4) è già **assimilato**, ritengo fin dalle elementari.

Anche la domanda n°5 (perimetro minimo) è riconducibile a quanto detto per la n° 3.

Gli alunni hanno trovato molta difficoltà nel rispondere alle domande n° 6 e n° 7 dove dovevano riconoscere la **retta** e **l'iperbole**. Come mi aspettavo solo un esiguo numero le ha riconosciute. Si era già parlato della retta ma non l'hanno riconosciuta in questa situazione meno strutturata. Si può però in parte e per taluni riconoscere questa **difficoltà** come legata alla loro non piena maturità cognitiva. L'argomento verrà ripreso in modo più approfondito l'anno prossimo.

3° Fede P., Evelyn, Simone, Yadi 15/03 - 16/05

Scheda_B1modificata.doc I.C.Vigolo Vattaro sc. Media classe 2A

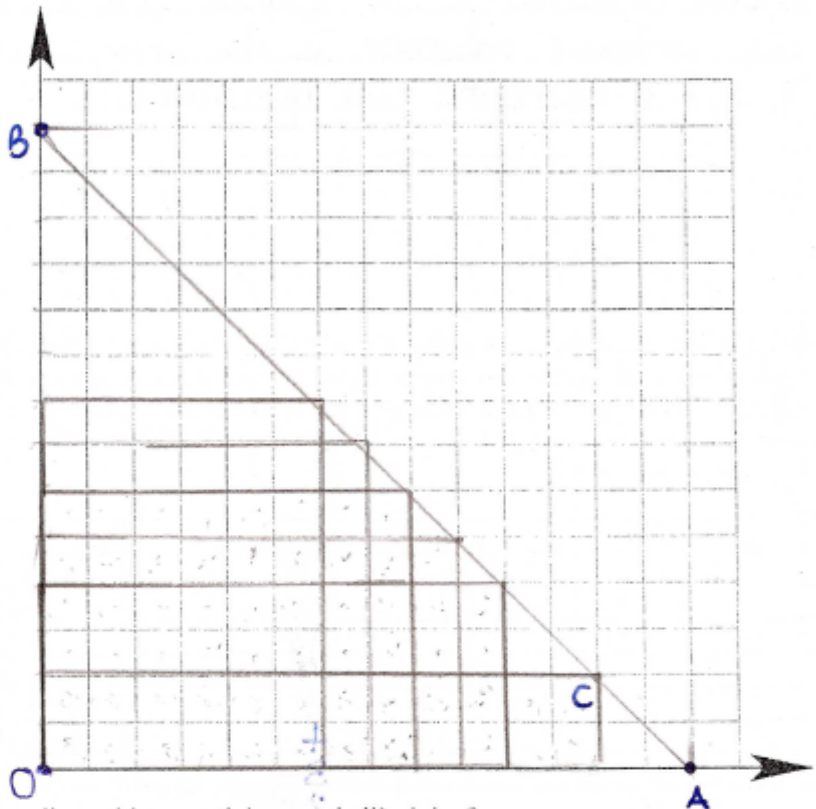
B1 Perimetro e area dei rettangoli

1. I due rettangoli di plexiglas hanno lo stesso perimetro.
Se si indica con R l'area del rettangolo rosso e con B quella del rettangolo blu, secondo te quale delle seguenti affermazioni è vera?

- [x] R > B
- [ ] B > R
- [ ] B = R

Motiva la tua risposta.
Abbiamo trovato il risultato misurando i lati e calcolando l'area.

2. Disegna sul foglio a quadretti tre diversi rettangoli di perimetro 28 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.



Come sono disposti i tre vertici opposti all'origine?
A scaletta

3. Scegli ora un punto qualsiasi sul segmento con estremi nei punti di coordinate (14;0) e (0;14). Costruisci il rettangolo che ha un vertice in quel punto, un altro vertice nell'origine ed i lati paralleli agli assi.
Quanto vale il perimetro di questo rettangolo?

24

4. Qual è il rettangolo di perimetro 28 che ha area massima? Motiva la tua risposta, dopo aver misurato le varie aree e riempito la tabella:

base	altezza	area
8	6	48
9	5	45
10	4	40
11	3	33
12	2	24

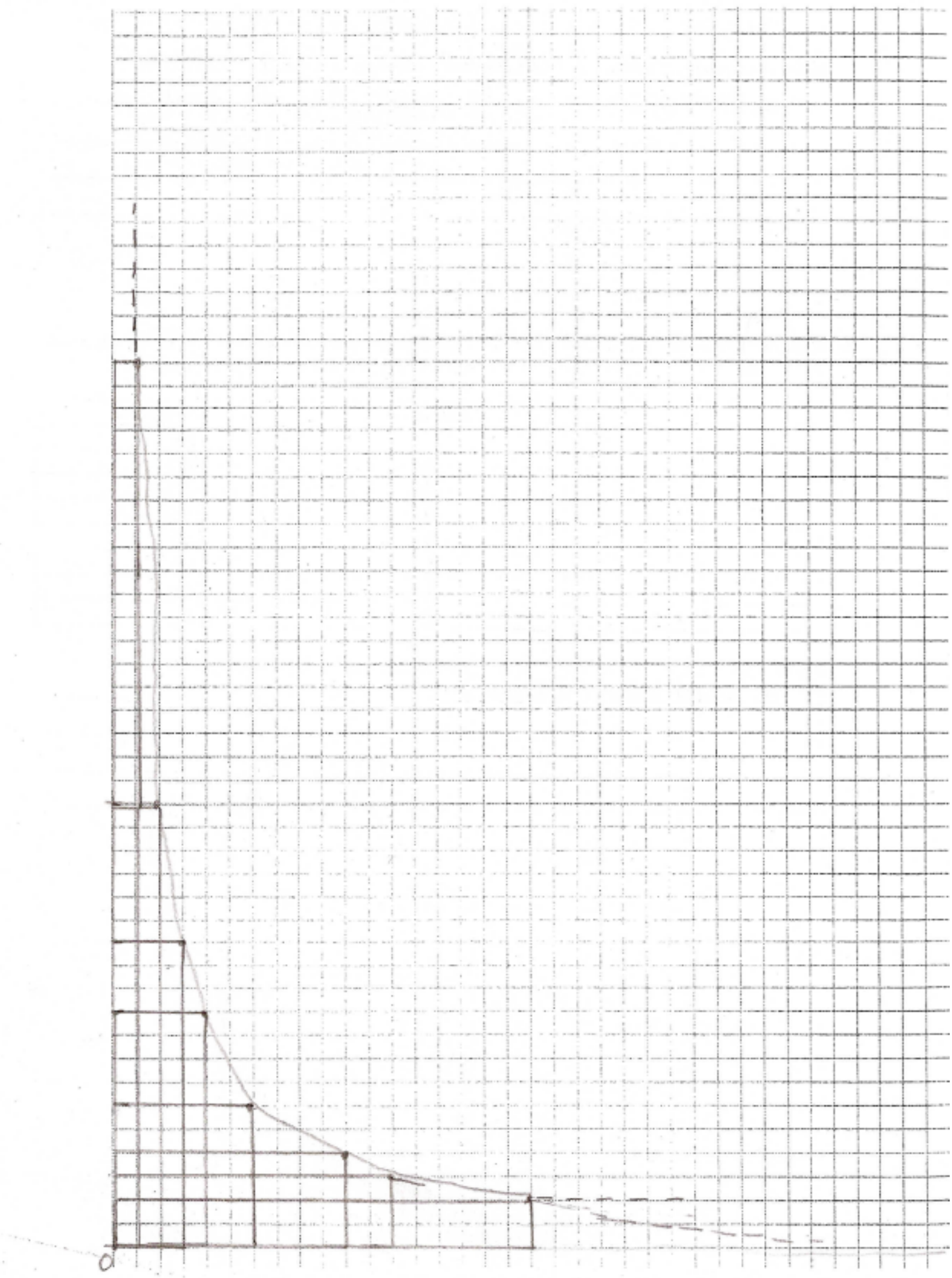
In generale, fra tutti i rettangoli con perimetro fissato, qual è quello di area massima? Fai qualche considerazione:

L'area massima è 48 perchè tra tutte le aree che abbiamo calcolato è la maggiore. Se b 7 e h 7 verrebbe un quadrato

5. Disegna ora sul foglio a quadretti alcuni rettangoli di area 36 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. Potresti partire da un rettangolo con la base lunga 1 quadretto e altezza 36 quadretti e poi aumentare la base a 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 e diminuire l'altezza relativa.
Fai i calcoli qua sotto:

base	altezza	area
1	36	$36 \cdot 1 = 36$
2	18	$18 \cdot 2 = 36$
3	12	$12 \cdot 3 = 36$
4	9	$4 \cdot 9 = 36$
6	6	$6 \cdot 6 = 36$
9	4	$9 \cdot 4 = 36$
12	3	$12 \cdot 3 = 36$
18	2	$18 \cdot 2 = 36$

Scheda_B1modificata.doc I.C.Vigolo Vattaro sc. Media classe 2A



3

Quale curva descrive il vertice opposto all'origine? Fai qualche considerazione personale

La curva non l'abbiamo mai vista se non nei trampolini e nelle piste da skateboard.

6. Qual' è il rettangolo di area 36 che ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta, dopo aver misurato i diversi perimetri dei rettangoli disegnati sopra e riempito la tabella:

base	altezza	perimetro
1	36	74
2	18	40
3	12	30
4	9	26
6	6	24
9	4	26
12	3	30
18	2	40

In generale, fra tutti i rettangoli di area fissata, qual è quello di perimetro minimo?

è il quadrato (24 cm)

Scheda_B1modificata.doc I.C.Vigolo Vattaro sc. Media classe 2A

B1 Perimetro e area dei rettangoli

1. I due rettangoli di plexiglas hanno lo stesso perimetro.
Se si indica con R l'area del rettangolo rosso e con B quella del rettangolo blu, secondo te quale delle seguenti affermazioni è vera?

☒ R > B

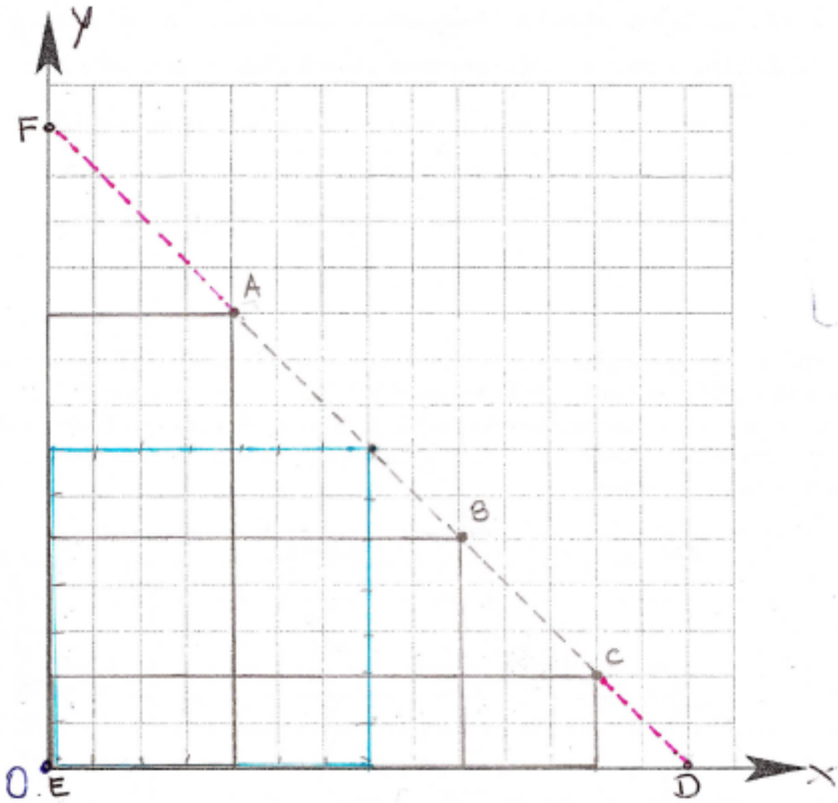
☐ B > R

☐ B = R

Motiva la tua risposta.

Abbiamo disegnato su un foglio di carta un modello di rettangolo blu e sovrapposto in 2 parti in cui uno corrisponde alla base dell'avanzione e il resto avanza.

2. Disegna sul foglio a quadretti tre diversi rettangoli di perimetro 28 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.



Come sono disposti i tre vertici opposti all'origine?

I 3 vertici opposti all'origine sono disposti su un segmento.

3. Scegli ora un punto qualsiasi sul segmento con estremi nei punti di coordinate (14;0) e (0;14). Costruisci il rettangolo che ha un vertice in quel punto, un altro vertice nell'origine ed i lati paralleli agli assi.
Quanto vale il perimetro di questo rettangolo?

Il perimetro di questo rettangolo misura 28 quadretti

4. Qual è il rettangolo di perimetro 28 che ha area massima? Motiva la tua risposta, dopo aver misurato le varie aree e riempito la tabella:

base	altezza	area
4 quadretti	10 quadretti	40
5	9	45
12	2	24
7	7	49

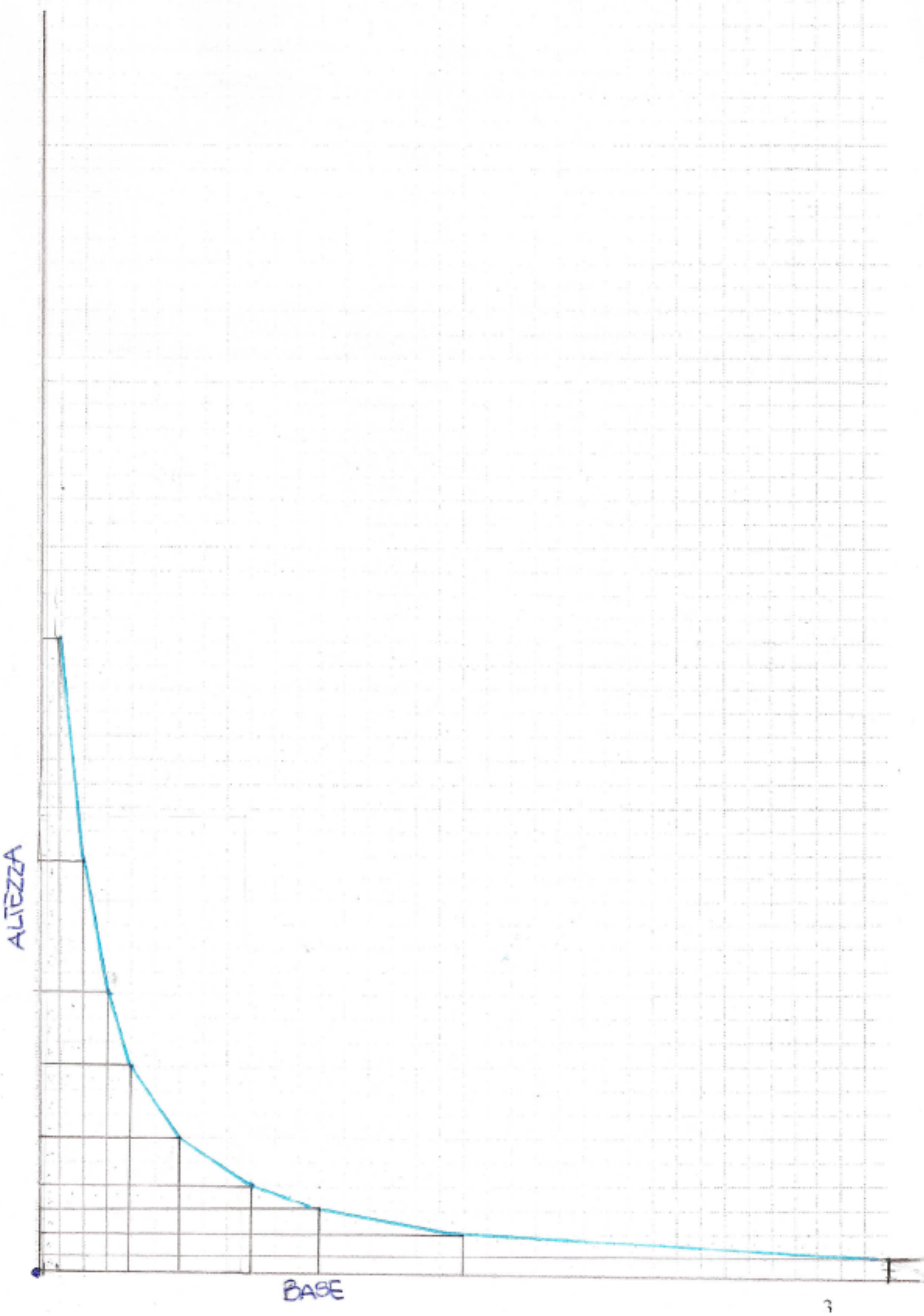
In generale, fra tutti i rettangoli con perimetro fissato, qual è quello di area massima? Fai qualche considerazione:

a risulta avere l'area maggiore il quadrato. Al secondo posto il rettangolo che ha una minore differenza tra i lati.

5. Disegna ora sul foglio a quadretti alcuni rettangoli di area 36 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. Potresti partire da un rettangolo con la base lunga 1 quadretto e altezza 36 quadretti e poi aumentare la base a 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 e diminuire l'altezza relativa.
Fai i calcoli qua sotto:

base	altezza	area
1	36	36 1 = 36
2	18	18 · 2 = 36
3	12	12 · 3 = 36
4	9	9 · 4 = 36
6	6	6 · 6 = 36
9	4	4 · 9 = 36
12	3	3 · 12 = 36
18	2	2 · 18 = 36

Scheda_B1modificata.doc I.C.Vigolo Vattaro sc. Media classe 2A



Quale curva descrive il vertice opposto all'origine? Fai qualche considerazione personale

È una curva strana che tende a diventare una retta, e ad impennarsi man mano che la base diminuisce.

6. Qual' è il rettangolo di area 36 che ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta, dopo aver misurato i diversi perimetri dei rettangoli disegnati sopra e riempito la tabella:

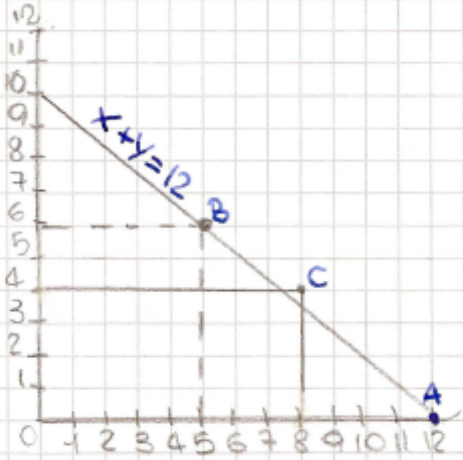
base	altezza	perimetro
1	36	74
2	18	40
3	12	30
4	9	26
6	6	24
9	4	26
12	3	30
18	2	40

In generale, fra tutti i rettangoli di area fissata, qual è quello di perimetro minimo?

È il quadrato. Qui è il contrario dell'altro, qui il quadrato ha il per. minore.

Rettangoli isoperimetrici

$x + y = 12$ è la rappresentazione matematica che rappresenta l'insieme dei rettangoli isoperimetrici.



L'equazione (dell'asse delle x) $y=0$ / $x=0$

Es 1-2

Due rettangoli che hanno uguale perimetro si chiamano isoperimetrici, essi hanno anche l'area massima

Es 3

Il quadrato ha l'area massima

Es 4

Nei casi limite l'area è massima.

Es 5

5-13 16-2 8-10

14-4 9-9 11-7

Es 6

6-6 9-3 11-1

7-5 8-4 10-2

Es 7

14 e 2

Es 8

14-14

Es 9

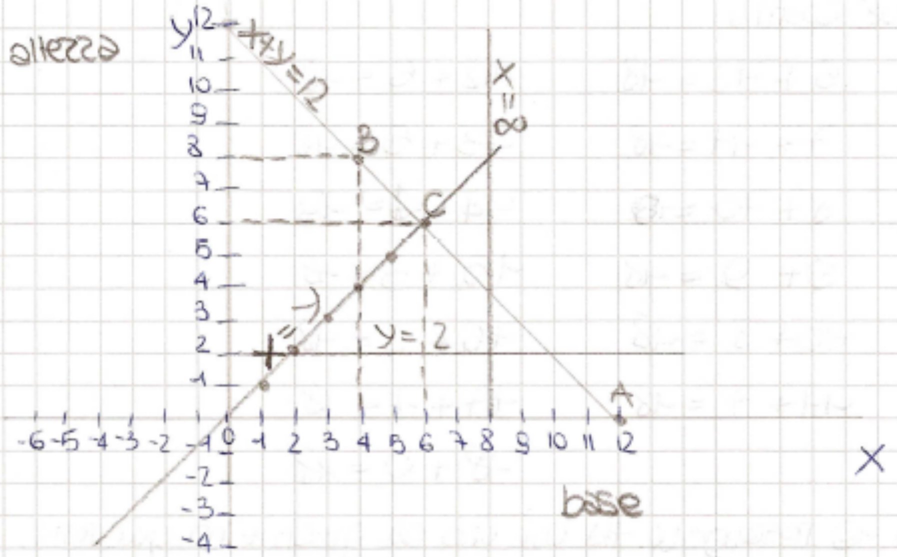
$x + y = 12$

Mi sono accorta di aver sbagliato gli esercizi perchè non capivo bene cosa chiedeva la consegna.

RETTANGOLI ISOPERIMETRICI

Sostanza di questo lavoro è trovare il nome della retta

$X + Y = 12$ nome della retta che rappresenta gli insiemi dei rettangoli isoperimetrici di semiperimetro 12.



$X + Y = 12$

$12 + 0 = 12$ A

$6 + 6 = 12$ B

$8 + 4 = 12$ C

L'equazione della retta (asse delle X) è uguale a $Y = 0$

L'equazione della retta (asse delle Y) è uguale a $X = 0$

L'equazione della bisettrice è uguale a $X = Y$

Problemi isoperimetrici e di area minima alla scuola media di Dro

Paola Lionello, Istituto Comprensivo "Nuova Europa" Dro

Contesto

scuola	Classi	periodo	Tipologia ore utilizzate
I.C. Dro	III B formata da 22 studenti. La classe è abituata a svolgere alcune attività in gruppo documentando il percorso.	novembre 2007 febbraio 2008	curricolari

Modalità di lavoro

Gruppi	Modalità presentazione schede	Registrazione dell'attività da parte degli studenti	Eventuale compresenza di colleghi
6 gruppi da 3/4 studenti scelti dall'insegnante, previo sociogramma	B1, B2 e B3 modificate in 7 schede di lavoro. Discussione alla fine di ogni scheda di lavoro	Inizialmente di gruppo Dopo la discussione trascrizione individuale	nessuna

Scheda B1 modificata

Tempi

6 lezioni da 55 minuti 2 lezioni per ogni scheda di lavoro: una per l’attività pratica, l’altra per la discussione e formalizzazione dei risultati ottenuti	330 minuti

Risposte degli studenti

punto 1.
Si richiedeva anche di verificare l’isoperimetria procedendo senza strumenti di misura tradizionali. Inizialmente per alcuni gruppi la mancanza di un righello creava problemi, ma successivamente tutti hanno eseguito la verifica confrontando i lati dei due rettangoli facendoli rotolare: chi uno contro l’altro, chi sul banco.
Per il confronto delle aree la maggior parte ha usato la bilancia, il cui uso è stato giustificato dalla identica natura del materiale costituente i due rettangoli. Due gruppi hanno anche copiato le sagome sul cartoncino, sovrapposte, ritagliato le parti sporgenti e confrontato.

punto 2.
Tutti i gruppi hanno compreso che i vertici opposti all'origine stavano su una linea retta.

punto 3.
Tutti i gruppi hanno compreso che valore doveva avere il perimetro del rettangolo, solo dopo la discussione si è però concluso che i vertici potevano essere descritti dalla retta, a questo punto senza ulteriori difficoltà sono giunti all'espressione (non hanno ancora incontrato il termine equazione): $x + y = 24$

punto 4.
Tutti i gruppi hanno risposto correttamente, durante la discussione sono stati portati a notare che minore è la differenza tra i lati, maggiore è l’area.

punto 5.
Gli studenti sono stati molto veloci nel riconoscere l'iperbole (già incontrata nello studio della proporzionalità), si è discusso sul perché proprio l'iperbole e non una spezzata. Disegnando rettangoli con il vertice libero sulla spezzata abbiamo verificato che la loro area non era 36 cm^2 (il valore proposto nel quesito). Completata la discussione si è scritta l'equazione (adesso padroneggiano anche questo termine) dell'iperbole come $x \cdot y = 36$.

punto 6.
Tutti i gruppi sono giunti correttamente alla soluzione.

La scheda è stata suddivisa in tre, ognuna da svolgere in una lezione. In tal modo gli studenti venivano guidati, con passi intermedi, ma si è cercato di rimanere più possibilmente fedeli nel linguaggio alla scheda originale

Scheda B2 modificata

Tempi

6 lezioni da 55 minuti 2 lezioni per ogni scheda di lavoro: una per l'attività, l'altra per la discussione e formalizzazione dei risultati ottenuti	330 minuti

Risposte degli studenti

punto 1.

In alternativa alla strumentazione in dotazione con la scheda originale, per disegnare l'elisse, gli studenti hanno usato un rettangolo di compensato sul quale appoggiare il triangolo stampato, tre puntine da disegno ed un filo (cotone da uncinetto) legato per formare un anello di 30 cm. Tutti i gruppi, dopo aver disegnato alcuni triangoli, sono arrivati a creare l'elissi.

punto 2.

Tutti i gruppi hanno risposto correttamente, alcuni senza svolgere calcoli hanno direttamente scelto l'altezza maggiore.

punto 3.

Inizialmente alcuni studenti credono esista un unico triangolo con le caratteristiche date, guidati dall'insegnante riflettono, quindi svolgono tutti l'attività correttamente.

punto 4.

Ormai hanno capito il tipo di ragionamento e giungono alla risposta senza difficoltà.

punto 5.

Per alcuni studenti il termine poligono equivale a quadrilatero, anche teoricamente ne sanno bene la differenza, si discute e si cerca di risalire alla causa dell'equivoco.

punto 6.

Tutti i gruppi sono giunti correttamente alla soluzione perché a quel punto molti "falsi - concetti" erano stati chiariti, inoltre la classe aveva svolto attività sulle bolle di sapone e il cerchio.

Variazioni rispetto all'originale

La scheda è stata suddivisa in tre, ognuna da svolgere in una lezione. In tal modo gli studenti venivano guidati, con passi intermedi, ma si è cercato di rimanere più possibilmente fedeli nel linguaggio alla scheda originale

Scheda B3 modificata

Tempi

3 lezioni da 55 minuti: 1 attività di controllo dei volumi, misura altezza e diametro 1 rivestimento superfici (basi e laterale) con carta colorata e calcoli aree 1 discussione e formalizzazione dei risultati ottenuti	165 minuti

Risposte degli studenti

Punto1.

Si è dedicato tempo per l'acquisizione di manualità nell'uso della strumentazione e per verificare con vari metodi l'equivalenza dei cinque volumi, istintivamente avrebbero assegnato minor valore al cilindro rosso. Si è ricavata la formula del volume dai concetti generici appresi in classe prima.

Si sono rivestite le superfici dei cilindri con carta colorata, ottenendo cerchi e rettangoli, è stato così <u>facile</u> acquisire i concetti di superficie di base, superficie laterale, superficie totale e farne i calcoli delle aree.

Punto2.

Non è stato svolto

Punto3-4-5.

Sono stati svolti come discussione studiando le tabelle e guidando le loro osservazioni, confrontando i cilindri e facendone ricavare le caratteristiche. E' stato scoperto in questa circostanza il cilindro equilatero.

Variazioni rispetto all'originale

Si è mantenuta la scheda tal quale ma limitandosi al primo punto, il secondo troppo formale per la mia terza media è stato tolto, gli altri punti, per quanto attiene il lavoro di gruppo, sono stati svolti solo oralmente. Tutte le osservazioni sono state diligentemente trascritte nel "quaderno delle regole".

Verifiche

Tempo di somministrazione	55 minuti
Tipologia A Tipologia B	7 quesiti a risposta aperta che richiedono una parte operativa guidata e una parte di spiegazione e motivazione di quanto svolto. (voto massimo BUONO) 9 quesiti a risposta aperta che richiedono sia una parte operativa che una parte di descrizione e motivazione di quanto affrontato in classe. (voto massimo OTTIMO)
Obiettivi	Verificare l'acquisizione di un linguaggio ed un formalismo appropriati. Affrontare situazioni analoghe a quelle pratiche, trattate a lezione, utilizzando un livello superiore di astrazione (tipologia B) Saper generalizzare quanto imparato.
Esiti	**10 studenti** hanno scelto la prova guidata, tra questi solo un'alunna non ha saputo ripercorrere il cammino svolto in classe e giungere così alle conclusioni richieste. **12 alunni** hanno svolto la prova tipologia B, un alunno ha sbagliato tutte le risposte come se scrivesse senza leggere i quesiti. Non sufficiente: 2 Sufficiente: 6 Buono: 7 Distinto: 4 Ottimo: 3
Osservazioni	Si può pensare che il tempo dedicato sia eccessivo, ciò a discapito del normale programma. Io ritengo che tale attività sia stata un'opportunità per rinforzare concetti che talvolta diamo per scontatamente assodati, mentre per molti alunni rimangono molto spesso troppo astratti. Inizialmente ritenevo di affrontare solo le schede B1 e B2, ma successivamente ho pensato di intraprendere lo studio sistematico dei solidi iniziando proprio dal cilindro e contestualmente alla sperimentazione proposta nella scheda B3. Ho chiesto agli alunni di ritagliare sulla carta colorata delle sagome tali da ricoprire esattamente ogni cilindro, l'attività è stata un po' lunga perché la manualità dei giovani è un po' carente, ma è stata un'occasione importante: avere tanti modellini a disposizione per poter ricavare in modo pratico il concetto di superficie laterale. Secondo me, molto più preciso e immediato, che non con le solite scatole poliedriche da aprire.
Seguono Allegati	Testi delle verifiche (materiali 4 marzo 2008) Analisi dettagliata della verifica tipologia B

VERIFICA DI GEOMETRIA Foglio A
CLASSE 3ªB   23-2-2008

1. Disegna sul grafico cartesiano almeno cinque diversi **rettangoli** di perimetro P = 36 cm, in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate

2. Come sono disposti i vertici C, opposti all'origine?

___

3. Completa la tabella seguente:

	rettangolo 1	rettangolo 2	rettangolo 3	rettangolo 4	rettangolo 5
Base (cm)					
Altezza (cm)					
Area (cm^2)					

4. Qual è il **rettangolo** di perimetro 36 cm con area maggiore?

___

5. Qual è il **rettangolo** di perimetro fissato con area maggiore? E quello di area minore?

___

___

6. Considera i **triangoli** di perimetro 30 cm e di base 10 cm, quale ha area massima?.

___

7. Qual è la **figura piana** di perimetro fissato con area maggiore?

___

VERIFICA DI GEOMETRIA Foglio B
CLASSE 3aB 23-2-2008

1. Considera i rettangoli di perimetro fissato 36 cm, supponi di rappresentarli nel piano cartesiano facendo in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e i due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.

   A quale curva appartiene il vertice opposto all'origine?

2. Scrivi l'equazione di tale curva.

3. Nel piano cartesiano considera i rettangoli così costruiti:
   a. un vertice nell'origine
   b. due lati rispettivamente sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate
   c. il quarto vertice appartenente alla curva di equazione $xy = 64$.

   Quale caratteristica hanno in comune questi rettangoli?

4. Quale tra i rettangoli del quesito precedente ha perimetro minimo? Quali sono le sue dimensioni?

5. Esiste un rettangolo di perimetro massimo?

6. Considera i triangoli di perimetro 30 cm e di base 10 cm. Supponi di rappresentarli facendo in modo che la base rimanga fissa e vari la posizione del vertice opposto C:

   - quale curva descrive il vertice C?
   - quali sono le dimensioni dei suoi assi?
   - quale triangolo ha area massima?

7. Tra tutti i triangoli di base 5 cm ed area 20 cm^2, quale ha perimetro minimo? Quali sono le sue dimensioni?

8. Fra tutte le figure piane con perimetro fissato, qual è quella di area maggiore?

9. Fra tutte le figure piane con area fissata, qual è quella di perimetro minore?

Analisi dettagliata della verifica

La verifica tipologia A è stata svolta da quasi tutti gli studenti in linea con le proprie potenzialità, evidenziando un buon livello di memorizzazione, assimilazione dei concetti ed una migliorata manualità.

La **verifica tipologia B** ha ottenuto i seguenti risultati:

Domanda	**Risposte esatte**	**Risposte incomplete**	**Risposte errate**	**Nessuna risposta**
N°1	11		1	
N°2	3	3	5	1
N°3	11		1	
N°4	10	1	1	
N°5	11		1	
N°6 a,c	11		1	
N°6 b	4	3	3	2
N°7	7	2	3	
N°8	11		1	
N°9	11		1	

Come si può notare i concetti non ancora acquisiti, anche se le risposte durante le discussioni avrebbero fatto pensare il contrario, sono l'equazione della retta e la misura degli assi dell'elisse.

SCHEDA DI LAVORO n°1

Data: ………………..... Alunni: ……………………………………………………………………

- Leggi attentamente tab. 1 per comprendere il significato dei nove esempi (uno per cella)

TABELLA 1

Una figura A ha perimetro **maggiore** ed area **maggiore** di un'altra figura B	Una figura A ha perimetro **maggiore** ed area **uguale** ad un'altra figura B	Una figura A ha perimetro **maggiore** ed area **minore** di un'altra figura B
Una figura A ha perimetro **uguale** ed area **maggiore** di un'altra figura B	Una figura A ha perimetro **uguale** ed area **uguale** ad un'altra figura B	Una figura A ha perimetro **uguale** ed area **minore** di un'altra figura B
Una figura A ha perimetro **minore** ed area **maggiore** di un'altra figura B	Una figura A ha perimetro **minore** ed area **uguale** ad un'altra figura B	Una figura A ha perimetro **minore** ed area **minore** di un'altra figura B

- Trasforma le frasi di tab. 1 in simboli matematici e riportali in tab. 2, come mostra l'esempio nella prima cella (in alto a sinistra).

TABELLA 2

P	A	P	A	P	A
$>$	$>$				

- Ritieni possibile fare un esempio per ognuna delle nove situazioni della tabella, utilizzando figure non necessariamente della stessa forma?

- Disegna gli esempi che ritieni possibili, se una o più situazioni non sono realizzabili motivane il perché; utilizza figure “qualsiasi”, anche poligoni convessi.

SCHEDA DI LAVORO n°2

Data: ………………..... Alunni: ………………………………………………………………………

- I due rettangoli di plastica hanno lo stesso perimetro.

  Trova una strategia per verificare tale affermazione, senza usare righello o fogli a quadretti e descrivila.

____

____

____

____

____

____

- Se si indica con R l'area del rettangolo rosso e con B quella del rettangolo blu, secondo te quale delle seguenti affermazioni è vera?

☐ R > B

☐ B > R

☐ B = R

Motiva la tua risposta.

____

____

____

- Trova una strategia per verificare l'esattezza della tua risposta, senza usare righello o formule, ma solo il materiale a disposizione (fogli colorati, forbici, bilancia).

  Descrivi come hai proceduto.

____

____

____

____

____

SCHEDA DI LAVORO n°3

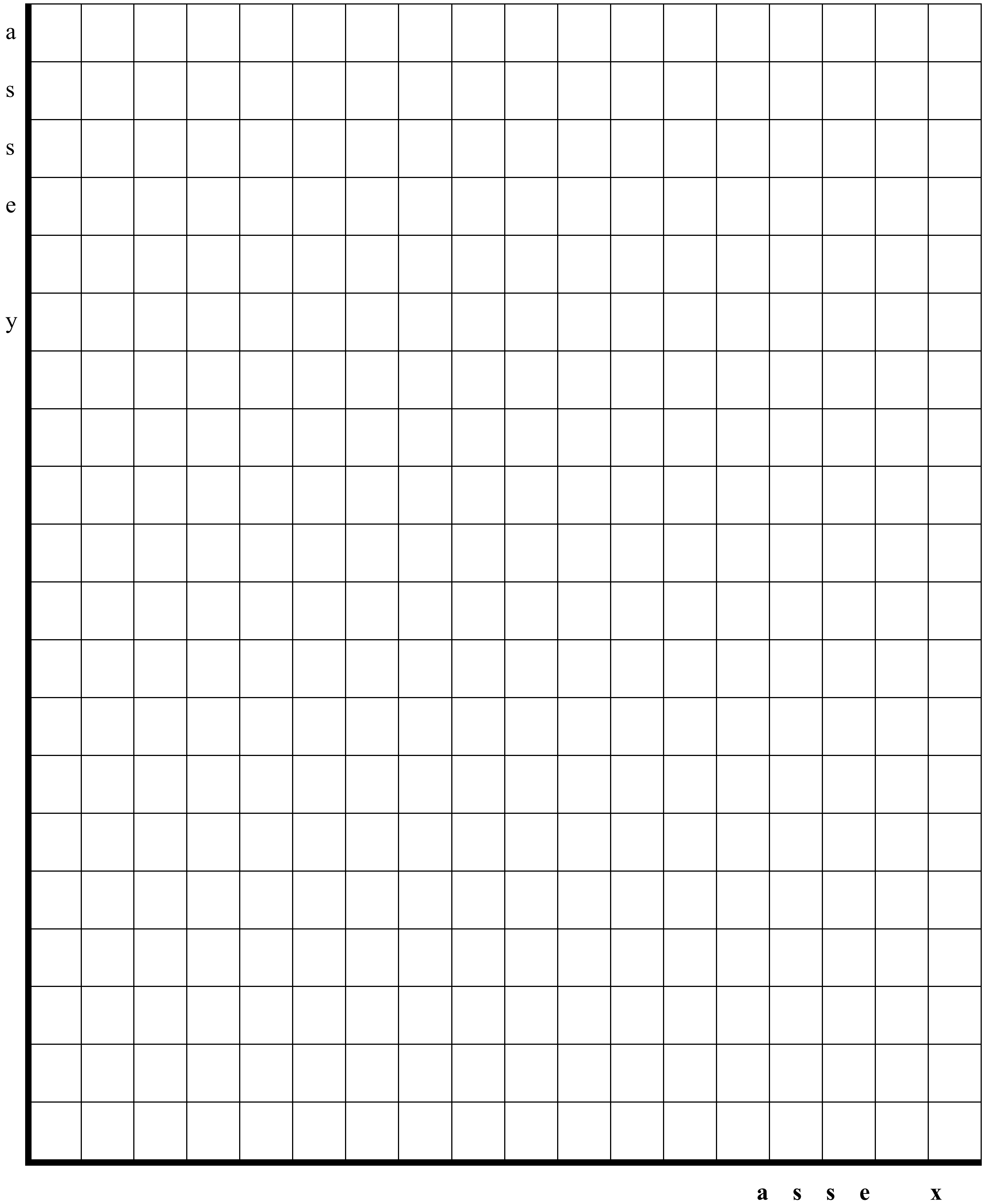
Data: ……………..... Alunni: ……………………………………………………………

- Disegna il contorno del rettangolo in plastica blu sul piano cartesiano, in modo che un vertice sia nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse (asse x) e delle ordinate (asse y). Indica con la lettera A il vertice opposto all'origine.

- Ripeti l'operazione, dopo aver ruotato la figura di 90° ed indica con la lettera D il vertice opposto all'origine.

- Ripeti tutto il procedimento per il rettangolo in plastica rossa, indicando i due vertici opposti all'origine con le lettere B e C, nell'ordine.

- Descrivi come sono disposti i quattro vertici A, B, C e D.


asse y
asse x

- Scegli ora un punto qualsiasi sul segmento AD, costruisci il rettangolo che ha un vertice in quel punto, un altro vertice nell'origine ed i lati paralleli agli assi.

  Quanto vale il perimetro di questo rettangolo? Motiva la tua risposta.

SCHEDA DI LAVORO n°4

Data: ………………..... Alunni: ……………………………………………………………………

- Dopo aver esaminato i risultati ottenuti nella scheda n°3 e gli esercizi svolti a casa, rispondi alla seguente domanda: **in generale, fra tutti i rettangoli con perimetro fissato, qual è quello di area massima?** Motiva la tua risposta.

- Disegna ora sul grafico cartesiano almeno quattro rettangoli di area 36 cm^2, in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.

- Descrivi come sono disposti i vertici liberi A, B, C, D…

- Quale tra i rettangoli disegnati ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta.

Asse y

asse x

- In generale, fra tutti i rettangoli di area fissata, qual è quello di perimetro minimo?

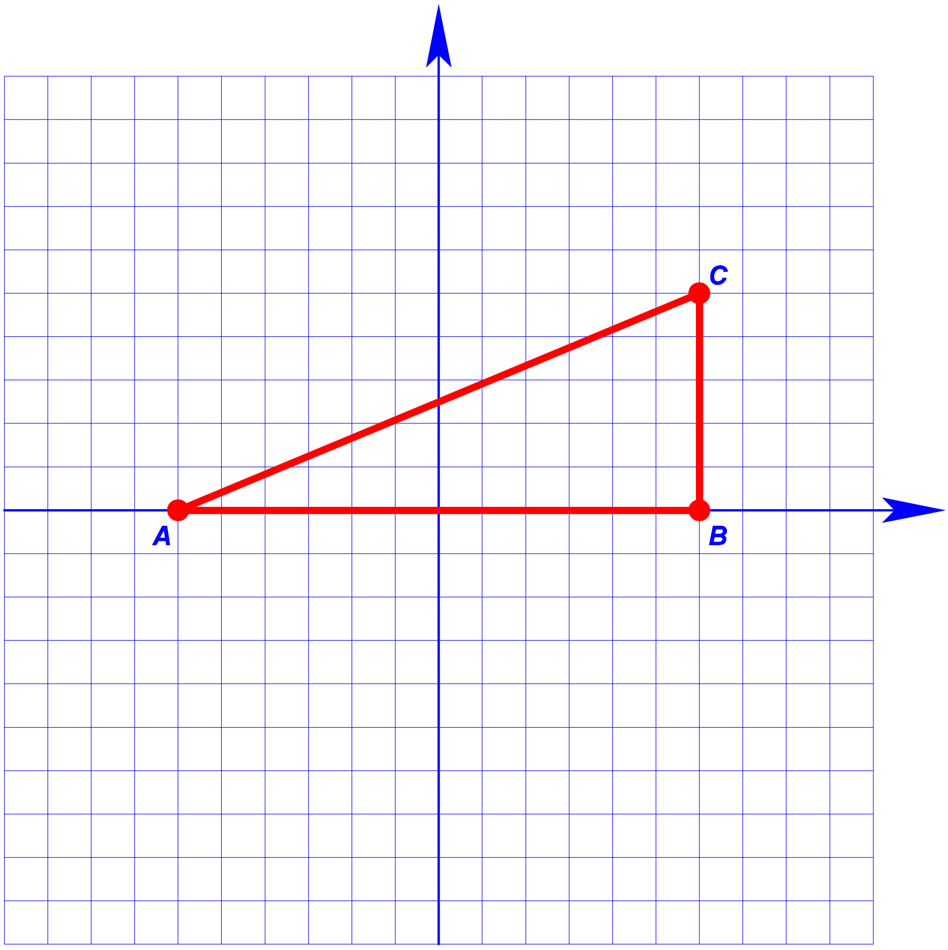
SCHEDA DI LAVORO n°5

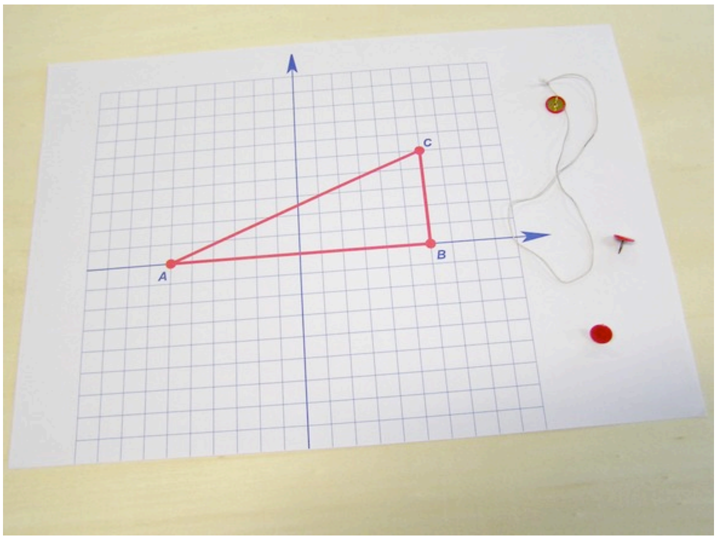
Data: ……………….... Alunni: ……………………………………………………………………

- Il triangolo rettangolo *ABC* in figura, ha base e perimetro che misurano rispettivamente 12 cm e 30 cm. Riesci a disegnare altri triangoli aventi la stessa base *AB* e lo stesso perimetro? Descrivili

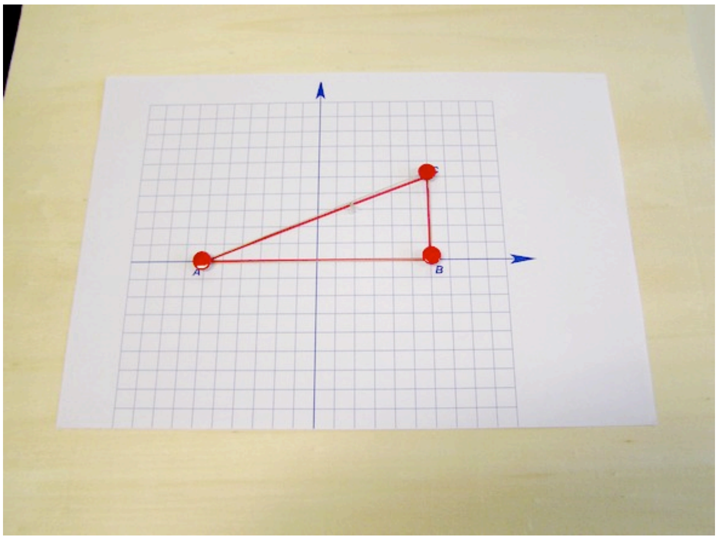
- Come potresti descriverli tutti? Puoi aiutarti con le puntine da disegno e la cordicella. Spiega il procedimento usato

- Fra tutti i triangoli che puoi ottenere in questo modo, qual è quello di area maggiore?

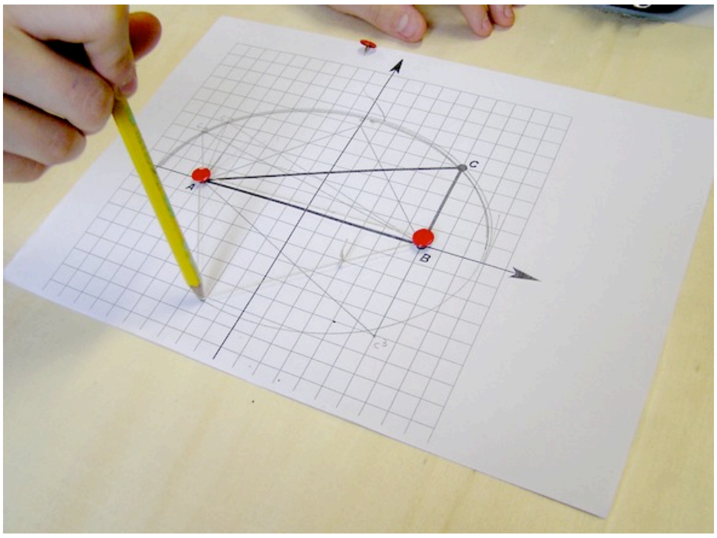

C
A
B



Le puntine rappresentano i vertici, l’anello
 di spago il perimetro di 30 cm.



Il vertice C (puntina) può essere spostato per ottenere altri triangoli di ugual perimetro, quanti?



L’elisse è la curva che descrive tutti i vertici C, ma per disegnarla bene serve un po’ di allenamento!

- Considera ora triangoli generici, di cui è fissato il perimetro, ma non la base e rispondi alla domanda seguente. Fra tutti i triangoli con lo stesso perimetro, qual è, secondo te, il triangolo con area massima? Motiva la tua risposta.

SCHEDA DI LAVORO n°6

Data: ………………..... Alunni: ………………………………………………………………

- Disegna ora alcuni triangoli, tutti di area 15 cm^2 e con la stessa base *AB* lunga 6 cm. Come sono disposti i vertici opposti alla base?

____

____

- Qual è, fra i triangoli che hanno queste caratteristiche, quello di perimetro minimo?

____

Motiva la tua risposta.

____

____

____

____

____

____

- Considera ora triangoli generici, di cui è fissata l'area, ma non la base e rispondi alla domanda seguente. Fra tutti i triangoli con la stessa area, qual è, secondo te, il triangolo con perimetro minore?

____

Motiva la tua risposta.

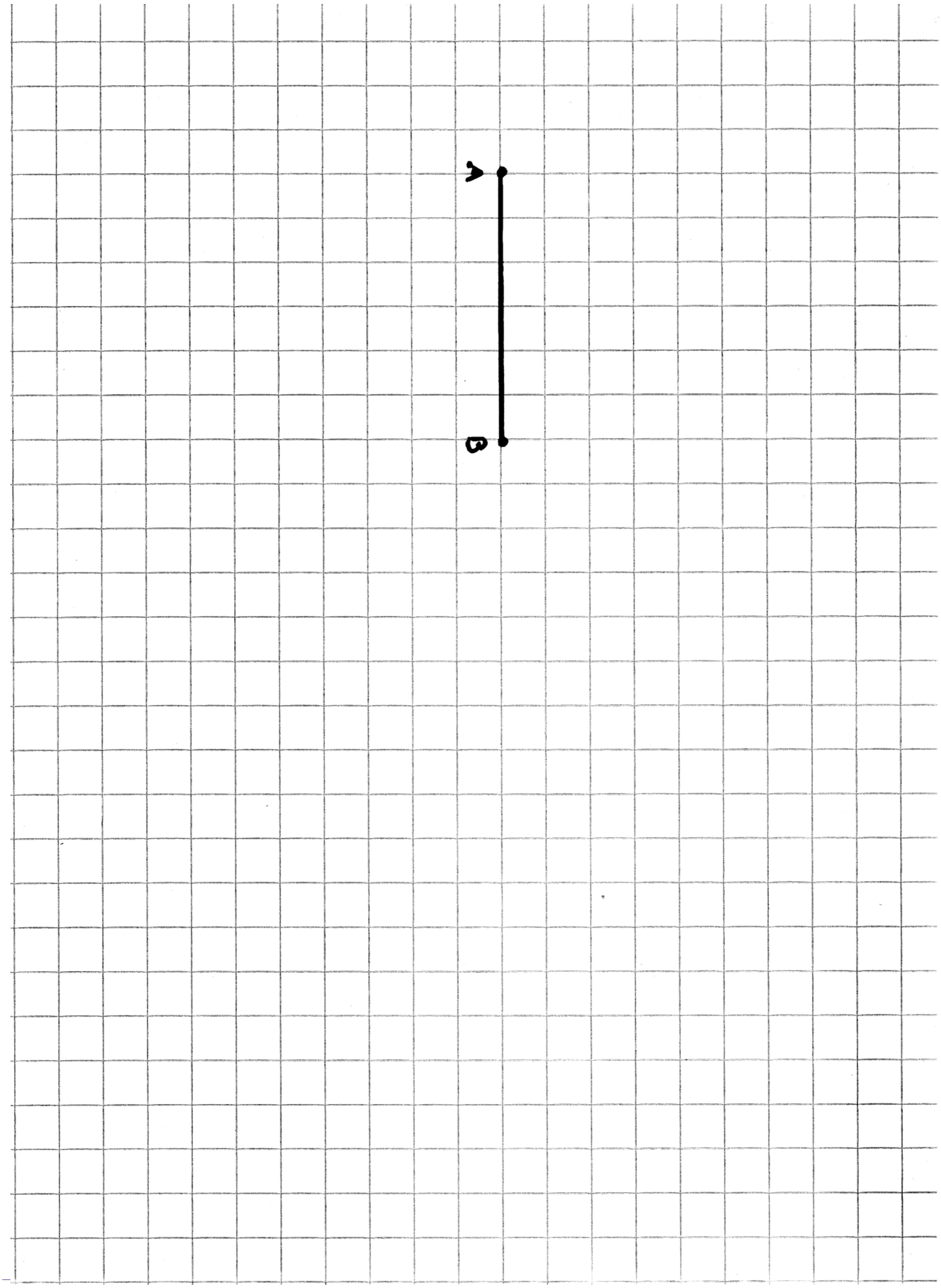
____

____

____

____

____


A
B

SCHEDA DI LAVORO n°7

Data: ……………….... Alunni: ………………………………………………………………

- Fra tutti i **triangoli** di perimetro fissato, qual è quello con **area** maggiore?

- Fra tutti i **quadrilateri** di perimetro fissato, qual è quello con **area** maggiore?

  Motiva la tua risposta.

- Fra tutti i **poligoni** di perimetro fissato e **aventi lo stesso numero di lati**, qual è quello con **area** maggiore?

  Motiva la tua risposta.

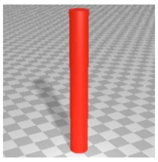
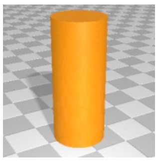
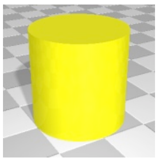
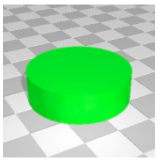
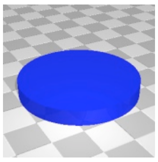
- Fra tutte le figure piane con perimetro fissato, qual è quella di area maggiore?
  Fra tutte le figure piane con area fissata, qual è quella di perimetro minore?

  Motiva le risposte.

SCHEDA DI LAVORO n°8

Data: ……………….... Alunni: ……………………………………………………………………

- Misura le dimensioni dei cilindri con gli strumenti a disposizione e compila la seguente tabella (ti consigliamo di esprimere i valori di area e volume nella forma $x\pi$):

	diametro (cm)	*altezza (cm)*	*area (cm^2)*	*volume (cm^3)*
 *cilindro rosso*				
 *cilindro arancio*				
 *cilindro giallo*				
 *cilindro verde*				
 *cilindro blu*				

- Cosa ti suggerisce la tabella?

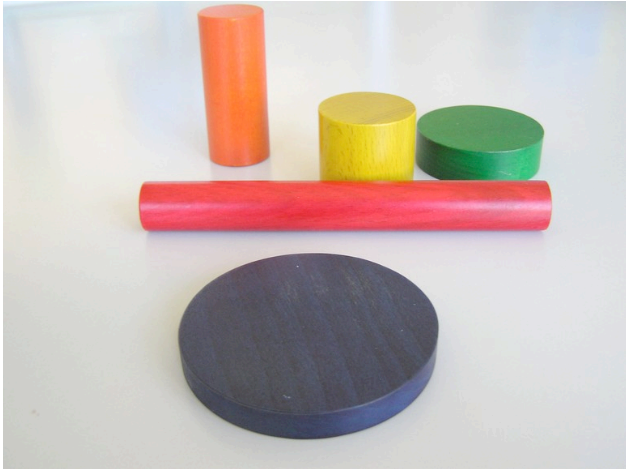
____

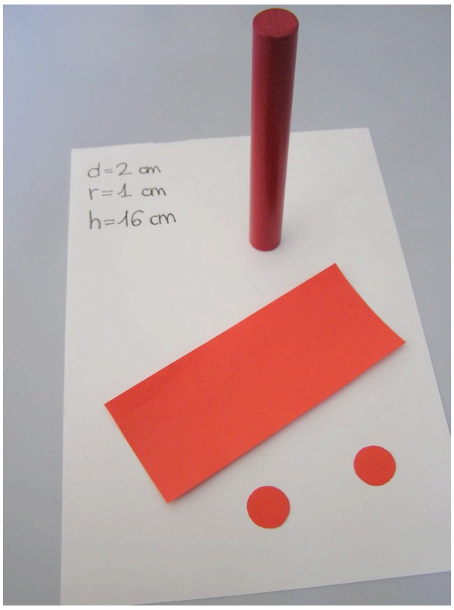
____

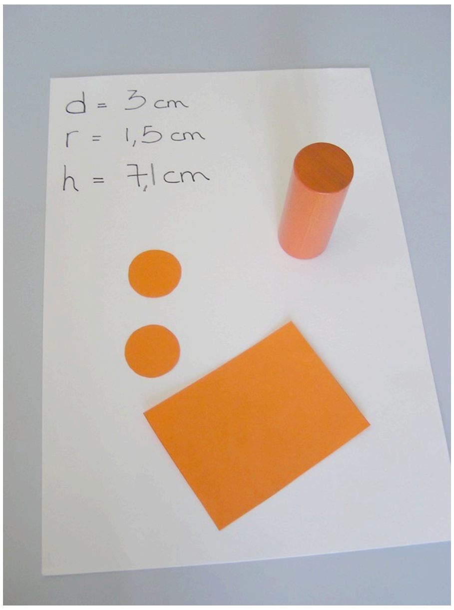
____

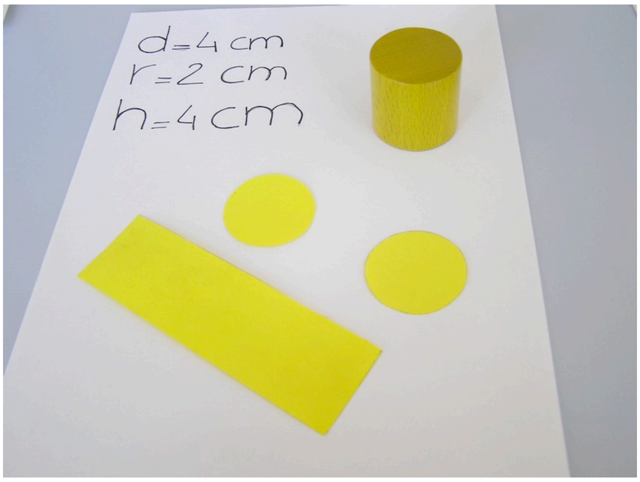
- Fra questi cilindri, quale ha l'area esterna minore?

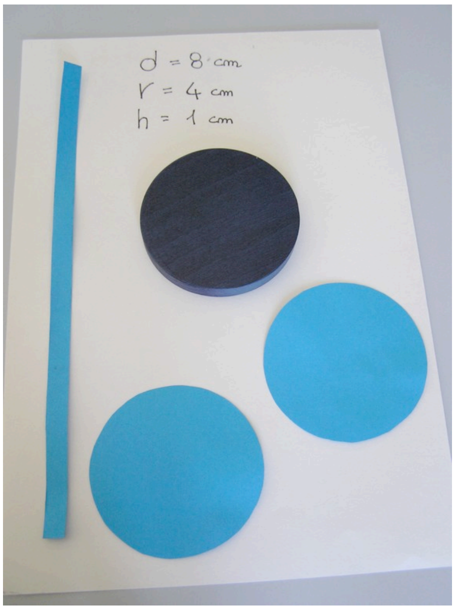
____

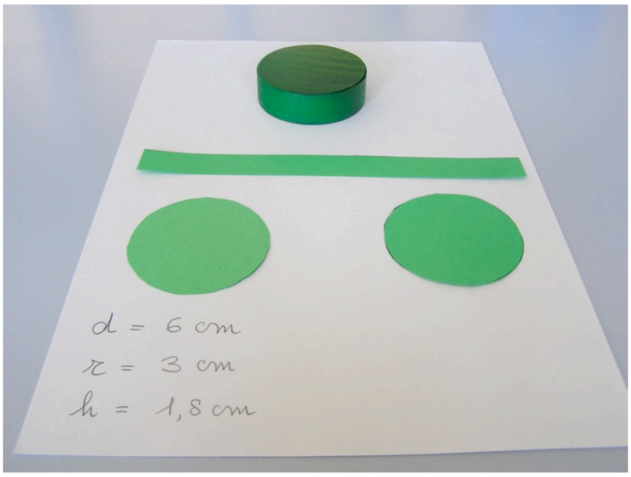



d=2 cm
r=1 cm
h=16 cm


d = 3 cm
r = 1,5 cm
h = 7,1 cm


d=4 cm
r=2 cm
h=4 cm


d = 8 cm
r = 4 cm
h = 1 cm


d = 6 cm
r = 3 cm
h = 1,8 cm

Attività su reti minime[4]

Paola Lionello, Istituto Comprensivo "Nuova Europa" Dro

CLASSI COINVOLTE: IA e IIC della Scuola secondaria di primo grado"Nuova Europa" I.C.Dro

Obiettivi

Classe seconda:

- Acquisire il concetto di rete minima
- Collegare fenomeni osservati in diverse discipline per formulare ipotesi
- Applicare il Teorema di Pitagora in situazioni reali
- Esercitarsi nei calcoli aritmetici acquisendo dimestichezza con i numeri irrazionali

Classe prima:

- Acquisire il concetto di rete minima
- Collegare fenomeni osservati in diverse discipline per formulare ipotesi
- Adottare strategie per confrontare segmenti senza misurarli
- Saper descrivere e motivare le strategie utilizzate

Prerequisiti

Classe seconda:

La classe aveva svolto, nell'anno scolastico precedente, laboratori sulle **bolle di sapone** e quindi doveva ricordare le caratteristiche delle lamine saponate; inoltre aveva affrontato, sia teoricamente che nei calcoli, l'unità didattica sui **numeri irrazionali**. Dall'inizio del corrente anno scolastico ha lavorato sul **Teorema di Pitagora**.

Classe prima:

Ampio spazio nell'orario di scienze, del corrente anno scolastico, è stato dedicato alle proprietà dell'acqua e in tale contesto sono stati svolti laboratori sulle **bolle di sapone** e sulle caratteristiche delle lamine saponate. Nel curricolo di geometria la classe ha svolto un'attività sulla misura: una **misura senza metro**, durante la quale dovevano misurare il banco immaginando che l'unità di lunghezza non fosse stata ancora introdotta; inoltre aveva svolto attività pratiche sui **segmenti**, lavorando sul loro confronto e trasporto tramite compasso.

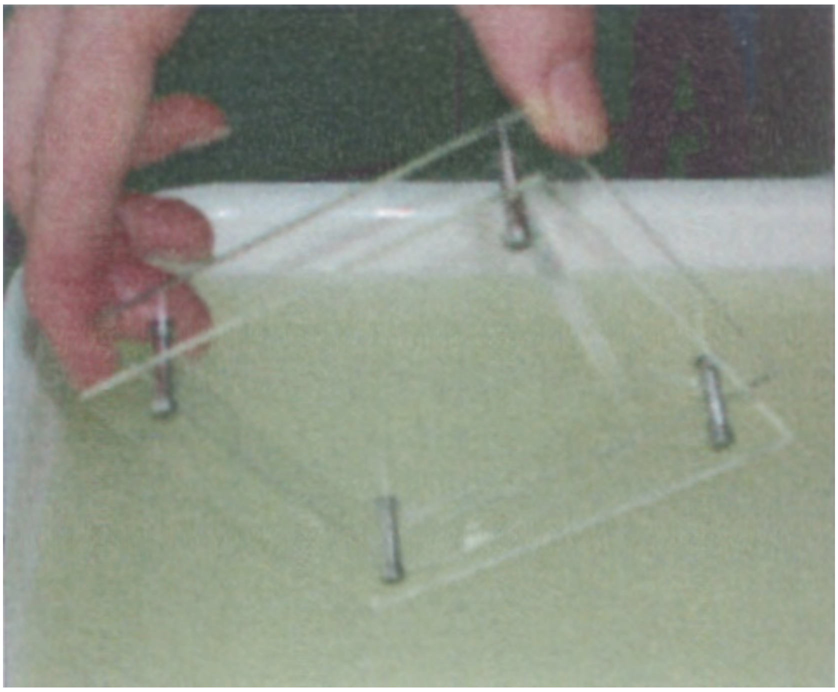
Strumenti e metodologie

Sono state utilizzate le schede A2 e A3 del laboratorio matematico, lievemente modificate per adattarle ai tempi e modi di lavoro della classe. Le schede così rettificate sono risultate 5 (vedi *Il laboratorio matematico nella didattica 1-5 IIC* e *Il laboratorio matematico nella didattica 1-5 IA*), per ognuna si voleva dedicare un'ora di lavoro di gruppo ed una di discussione e condivisione dei risultati. In realtà nella classe seconda sono state necessarie più ore di discussione per stimolare l'interesse in quanto gli studenti risultavano apatici e poco inclini al ragionamento. Gli studenti hanno lavorato suddivisi in gruppi equieterogenei composti da tre/quattro ragazzi, tali gruppi sono stati formati dall'insegnante dopo aver steso un sociogramma della classe per evitare errati abbinamenti.

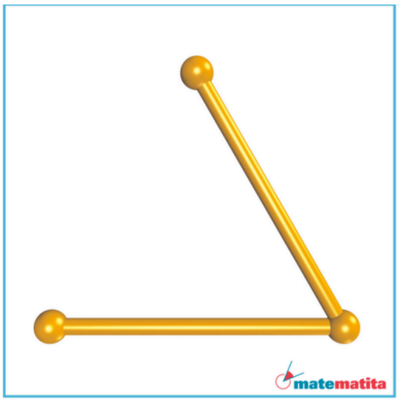
[4] Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 5

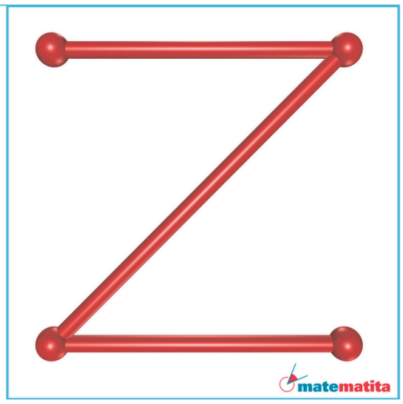
Per la fase sperimentale, sono state predisposte:

- lastrine con tre o quattro pioli,

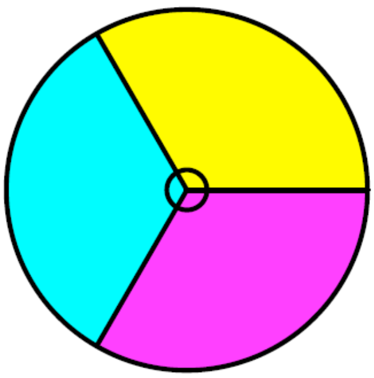


- tessere plastificate con le rappresentazioni delle varie reti,
  4 tessere gialle (reti tra i tre vertici di un triangolo equilatero)
  9 tessere rosse (reti tra i quattro vertici di un quadrato)





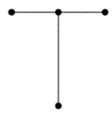
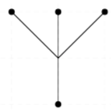
- indicatori di 120°, anch’essi plastificati



Analisi conclusiva dell'attività

ATTIVITA’		ANALISI A PRIORI	ANALISI A POSTERIORI	OSSERVAZIONI
Classe seconda				
3 marzo scheda n°1 (materiale: scheda, lastrine a tre pioli, soluzione saponosa, vaschetta,indicatori dei 120°)	punto 1.	Dovrebbero ricordare che la caratteristica di una lamina di sapone è quella di minimizzare la sua superficie.	Tutti i gruppi precisano che la lamina, per avere superficie minima, assume una forma rettangolare.	Alcuni precisano che la lamina, dapprima un nastro arcuato, assume la sua forma con superficie minima quando la base diventa un segmento.
	punto 2.	Probabilmente proporranno la rete formata dai due lati del triangolo equilatero Nella rete sperimentale dovrebbero notare il punto aggiuntivo e i tre angoli di 120°	3 gruppi scelgono l’intero triangolo, 3 gruppi disegnano una figura delimitata da tre archi, con concavità verso il centro. Solo un gruppo nota gli angoli congruenti	Si è discusso sulla necessità di coerenza tra le varie affermazioni (sottolineano la formazione di un segmento e poi disegnano un arco!) E’ stato nuovamente precisato che la rete non è un percorso chiuso, cioè non si deve ritornare al punto di partenza Sono stati invitati a verificare la presenza o meno di angoli di 120°
	punto 3.	Dovrebbero aver compreso la possibilità di sfruttare un punto aggiuntivo e la presenza di tre angoli di 120°	2 gruppi: ipotesi esatta 3 gruppi: solo punto aggiuntivo 1 gruppo: insiste sul triangolo	
14 marzo scheda n°2 (materiale: scheda, quattro tessere con le reti gialle, indicatori dei 120°, calcolatrice)	punto 1.	Dovrebbero ricordare l’esperimento precedente e ordinare le quattro schede esattamente. Dovrebbero calcolare la lunghezza senza misura e dove è necessario usare il Teorema di Pitagora	Tutti i gruppi arrivano al giusto risultato, ma si bloccano nel calcolo.	Si è reso necessario interrompere l’attività, ripassando formule e stimolando il ragionamento
	punto 2.	Devono riportare i ragionamenti fatti per arrivare ad eseguire quei determinati calcoli	I gruppi si limitano a riportare i calcoli, talvolta errati, un solo gruppo riporta i propri ragionamenti e dubbi.	La rete minima è risolta da alcuni considerando il segmento 2/3 dell’altezza del triangolo equilatero, valore ottenuto con misura e non giustificato. Si è discusso perciò della possibilità di giungere allo stesso risultato con le formule (meraviglia!)
	punto 3.	Dovrebbero riconoscere la rete ottenuta con le lamine	Nessuno riporta che è la stessa rete ottenuta con l’acqua saponata	
	punto 4.	Dovrebbero rispondere di no perché le lamine formano la superficie minima all’interno delle lastrine, vista dall’alto la rete minima	Nessuno propone una nuova possibilità Solo un gruppo cita le lamine	Si discute a lungo sulla necessità di collegare le osservazioni sperimentali ai lavori teorici successivi.

28 marzo scheda n°3 (materiale: scheda, otto tessere con le reti rosse, indicatori dei 120°, calcolatrice)	punto 1/2	Dovrebbero ordinare correttamente le schede, individuando facilmente quelle di uguale lunghezza, eseguire i calcoli utilizzando il Teorema di Pitagora per quattro schede. Dovrebbero riconoscere che la rete minima è costituita dalle due diagonali del quadrato:$2\sqrt{2}$	2 gruppi individuano la giusta sequenza eseguendo esattamente i calcoli. Un gruppo inverte solo due schede per un errore di calcolo pur usando le formule adeguatamente	Ancora una volta riportano i calcoli senza commentarli o spiegare il motivo dell'uso di alcune formule, nonostante espressamente richiesto
	punto 3.	Potrebbero semplicemente dire che la rete minima è costituita dalle due diagonali del quadrato	Un solo gruppo si riferisce alle diagonali	Sempre più viene rimarcata la difficoltà o pigrizia a descrivere quanto si vede o si fa, anche se la correzione delle schede precedenti, svolta con discussione di classe e collaborando tra gruppi, avrebbe dovuto indirizzare gli alunni.
	punto 4.	Dovrebbero ricordare i 120° riscontrati nelle reti di tre punti e farsi venire qualche dubbio	Nessuno pensa ci sia una rete più corta.	
4 aprile scheda n°4 (materiale: scheda, lastrine con quattro pioli, soluzione saponosa, vaschetta, nona tessera con la rete rossa, indicatori dei 120°)	punto 1.	Visto che nella scheda n°3 nessuno ha ipotizzato una rete minore, dovrebbero meravigliarsi del responso delle lamine, ma riconoscere gli angoli di 120°	Come previsto, tutti riconoscono gli angoli e sottolineano l'utilizzo di due punti aggiuntivi	Questa volta la descrizione è sufficiente
	punto 2.	analogie: 120° differenze: numero dei punti e dei segmenti	un gruppo non comprende la consegna, tutti gli altri rispondono secondo le aspettative	
	punto 3.	L'uso delle formule, dopo tanti esercizi svolti, non dovrebbe più creare problemi. la rete creata dalle lamine dovrebbe dare la certezza che è minima	Tutti rispondono esattamente se si escludono lievi errori di calcolo	Finalmente sembra che i gruppi abbiano capito come lavorare, decido di aspettare un mese prima di proporre la scheda conclusiva, per verificare se hanno metabolizzato le procedure. Per ora decidono di somministrare una verifica per vedere come lavorano singolarmente.

6 giugno scheda n°5 (materiale: scheda, lastrine con quattro pioli di cui tre allineati, soluzione saponosa, vaschetta, indicatori dei 120°)	punto 1.	Dovrebbero cercare di disegnare una configurazione con angoli di 120°	Nessuno utilizza l'informazione relativa agli angoli da 120° ottenuta dalle lastrine precedenti, oltre a disegni con reti molto lunghe, le due risposte più quotate sono state le seguenti: 8 risposte  7 risposte 	Prima di proporre la scheda (per motivi vari sono trascorsi due mesi) riprendiamo il lavoro svolto in precedenza, facendolo raccontare ai vari gruppi, ma poi consegno schede individuali da valutare come ulteriore verifica. Sembra veramente non siano in grado di utilizzare in un nuovo contesto le informazioni acquisite
	punto 2.	analogie: 120° e punto aggiuntivo differenze: un segmento unisce direttamente due punti consecutivi	Rispondono tutti adeguatamente	Hanno imparato a descrivere quanto possono osservare

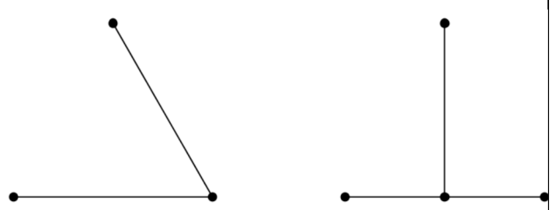
Classe prima

<table>
<tr><td rowspan="3">19 maggio

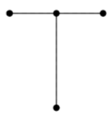
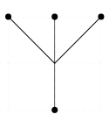
scheda n°1

(materiale: scheda, lastrine a tre pioli, indicatori dei 120°)</td><td>punto 1.</td><td>Dovrebbero ricordare che la caratteristica di una lamina di sapone è quella di minimizzare la sua superficie.</td><td>Tutti i gruppi precisano che la lamina, per avere superficie minima, assume una forma rettangolare (vista frontalmente) che osservata dall'alto appare come un segmento</td><td>Alcuni precisano che la lamina, dapprima un nastro arcuato assume poi la sua forma con superficie minima perdendo acqua</td></tr>
<tr><td>punto 2.</td><td>Probabilmente proporranno la rete formata dai due lati del triangolo equilatero.
Nella rete sperimentale dovrebbero notare il punto aggiuntivo e i tre angoli di 120°</td><td>5 gruppi scelgono l'intero triangolo,
1 gruppo disegna la giusta rete perché uno studente ricorda di averla vista a Matetrentino
2 gruppi notano gli angoli congruenti di 120°</td><td></td></tr>
<tr><td>punto 3.</td><td>Dovrebbero aver compreso la possibilità di sfruttare un punto aggiuntivo e la presenza di tre angoli di 120°</td><td>2 gruppi: ipotesi esatta
3 gruppi: solo punto aggiuntivo
1 gruppo: insiste sul triangolo</td><td><u>Stesso risultato che in seconda</u>!</td></tr>
<tr><td rowspan="4">27 maggio

scheda n°2

(materiale: scheda, quattro tessere con le reti gialle, indicatori dei 120°, compasso)</td><td>punto 1.</td><td>Dovrebbero ricordare l'esperimento precedente e ordinare le schede esattamente.</td><td>Tutti i gruppi arrivano al giusto risultato.</td><td rowspan="4">Alcuni studenti presentano dei dubbi tra due schede:

discutono senza trovare un accordo, quindi usano il compasso per verificare che il segmento verticale è più corto di quello obliquo.
E' rilevante che ciò non fosse così ovvio, da ricordare quando parliamo di cateti ed ipotenusa dando per scontato che quest'ultima sia il lato maggiore.</td></tr>
<tr><td>punto 2.</td><td>Devono riportare i ragionamenti fatti per ordinare le reti dalla più lunga alla più corta.</td><td>Un gruppo cita l'esperimento precedente come suggerimento nella scelta della rete minima.</td></tr>
<tr><td>punto 3.</td><td>Dovrebbero riconoscere la rete ottenuta con le lamine e quindi citare il punto aggiuntivo e gli angoli di 120°</td><td>Nessuno riporta che è la stessa rete ottenuta con l'acqua saponata, ma 3 gruppi danno la descrizione completa e 3 gruppi si limitano al punto aggiuntivo</td></tr>
<tr><td>punto 4.</td><td>Dovrebbero rispondere di no perché le lamine formano la superficie minima all'interno delle lastrine, vista dall'alto la rete minima</td><td>Nessuno propone una nuova possibilità

2 gruppi citano le lamine</td></tr>
</table>

29 maggio scheda n°3 (materiale: scheda, otto tessere con le reti rosse, indicatori dei 120°, compasso)	punto 1/2	Dovrebbero ordinare correttamente le schede, individuando facilmente quelle di uguale lunghezza e in caso di dubbi usare strategie senza misurare	Un solo gruppo sbaglia la rete minima tra le otto proposte. Un gruppo lavora correttamente, gli altri commettono lievi errori	La maggior parte degli alunni preferisce usare striscioline di carta per valutare la lunghezza delle reti, metodo più impreciso che il compasso, ma più veloce. Il gruppo che ha lavorato correttamente però aveva usato il compasso, ne è seguita un'interessante discussione.
	punto 3.	Potrebbero semplicemente dire che la rete minima è costituita dalle due diagonali del quadrato	Un gruppo cita le diagonali	
	punto 4.	Dovrebbero ricordare i 120° riscontrati nelle reti di tre punti e farsi venire qualche dubbio	Nessuno ricorda i 120°, ma un gruppo ha dei dubbi, non è certo sia la più corta	
5 giugno scheda n°4 (materiale: scheda, lastrine con quattro pioli, soluzione saponosa, vaschetta, nona tessera con la rete rossa, indicatori dei 120°)	punto 1.	Visto che nella scheda n°3 nessuno ha veramente ipotizzato una rete minore, dovrebbero meravigliarsi del responso delle lamine, ma riconoscere gli angoli di 120°	Il gruppo che aveva dei dubbi suggerisce una rete molto simile a quella minima (disegno impreciso). Quasi tutti riconoscono gli angoli congruenti e sottolineano l'utilizzo di due punti aggiuntivi	Molte difficoltà lessicali nelle descrizioni.
	punto 2.	analogie: 120° differenze: numero dei punti e dei segmenti	3 gruppi, seppur esprimendosi a fatica, colgono differenze ed analogie previste 3 gruppi dicono che questa rete è formata da due figure simili alla rete tra tre pioli	
	punto 3.	La rete creata dalle lamine dovrebbe dare la certezza che è minima	3 gruppi rispondono di no perché così dimostrano le lamine saponose 3 gruppi cercano di trovare altre soluzioni, ma alla fine desistono	
6 giugno scheda n°5 (materiale: scheda, lastrine con quattro pioli di cui tre allineati, soluzione saponosa, vaschetta, indicatori dei 120°)	punto 1.	Dovrebbero cercare di disegnare una configurazione con angoli di 120°	Nessuno utilizza l'informazione relativa agli angoli da 120° ottenuta dalle lastrine precedenti, ma analogamente all'altra classe sceglie tra queste due ipotesi: 1 risposte 5 risposte  	Si giustificano dicendo che non pensavano di poter unire direttamente due punti consecutivi, le lamine non l'avevano mai fatto!
	punto 2.	analogie: 120° e punto aggiuntivo. Differenze: un segmento unisce direttamente due punti consecutivi	Rispondono tutti secondo le aspettative	

Risultati Verifica Classe IIC 28 - 04 - 09

	Risposta esatta	Risposta imprecisa	Risposta errata	Quesito non svolto
Esercizio n°1				
quesito a	**16** 84,2%	/	**3** 15,8%	/
quesito b	**13** 68,4%	**2** 10,5%	**3** 15,8%	**1** 5,3 %
quesito c	**11** 57,8%	**4** 21,1%	**4** 21,1%	/
Esercizio n°2				
quesito a	**5** 26,3%	**3** 15,8%	**5** 26,3%	**6** 31,6%
quesito b	**18** 94,7%	**1** 5,3 %	/	/
quesito c	**11** 57,9%	**2** 10,5%	/	**6** 31,6%
quesito d	**2** 10,5%	/	**1** 5,3 %	**16** 84,2%
Esercizio n°3				
quesito a	**8** 42,1%	/	**2** 10,5%	**9** 47,4%
quesito b	**16** 84,2%	**1** 5,3 %	/	**2** 10,5%
quesito c	**11** 57,9%	/	/	**8** 42,1%
quesito d	/	/	/	**19** 100%
TOTALE	**52,7%**	**6,2%**	**8,6%**	**32,1%**

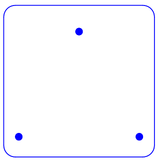
CLASSE IIC SCHEDA DI LAVORO n°1

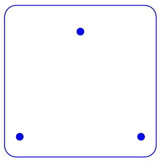
Data: ……………….... Alunni: ……………………………………………………………………

1. Metti la lastrina nell'acqua saponata, tenendola verticalmente e facendo in modo che solo due dei tre pioli siano immersi. Se ora la estrai, si dovrebbe formare una lamina di sapone. Descrivi le sue caratteristiche geometriche.

2. Secondo te, quale forma avrà la lamina di sapone che si ottiene immergendo interamente la lastrina nell'acqua saponata?

   Rappresenta la tua ipotesi nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.



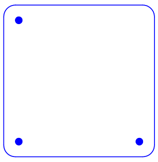


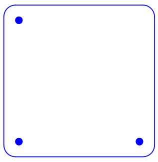
L'esperimento ha verificato la tua ipotesi? ______________________________

Descrivi le caratteristiche geometriche che presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente.

3. Quale forma avrebbe la lamina se i tre pioli fossero posti nei vertici di un triangolo isoscele rettangolo?

Rappresenta la tua ipotesi nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.





L'esperimento ha verificato la tua ipotesi? ______________________________

Descrivi le caratteristiche geometriche che presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente.

____

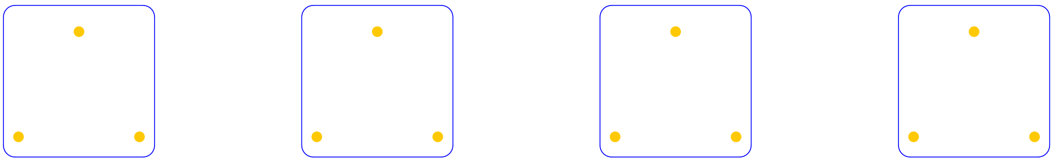
____

____

CLASSE IIC SCHEDA DI LAVORO n°2

Data: …………………..... Alunni: …………………………………………………………………

1. Hai a disposizione quattro tessere, ciascuna delle quali rappresenta un possibile percorso (*rete*) che congiunge tre punti posti nei vertici di un triangolo equilatero. Metti in ordine le quattro reti secondo la loro lunghezza, poi disegnale nella tabella seguente dalla più lunga alla più corta e specifica la lunghezza sotto ciascuna di esse, utilizzando il lato del triangolo come unità di misura.



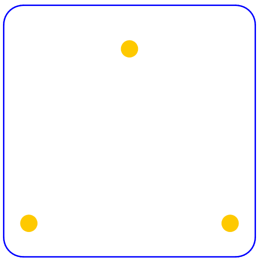
L = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________

2. Spiega quali calcoli hai eseguito per determinare le lunghezze delle quattro reti

3. Quali caratteristiche geometriche presenta la rete più breve?

4. Pensi che i tre punti possano essere collegati da una rete ancora più breve?

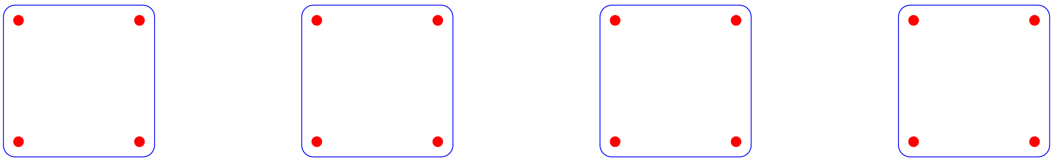
   Se pensi di **sì**, disegnala nella figura sottostante; se ritieni di **no**, motiva la tua risposta.



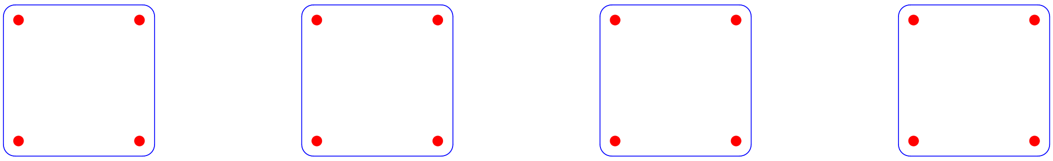
CLASSE IIC SCHEDA DI LAVORO n°3

Data: ………………..... Alunni: …………………………………………………………………

1. Hai a disposizione otto tessere, ciascuna delle quali rappresenta un possibile percorso (*rete*) che congiunge quattro punti posti nei vertici di un quadrato. Metti in ordine le otto reti secondo la loro lunghezza, poi disegnale nella tabella seguente dalla più lunga alla più corta e specifica la lunghezza sotto ciascuna di esse, utilizzando il lato del quadrato come unità di misura.



L = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________



L = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________

2. Spiega quali calcoli hai eseguito per determinare le lunghezze delle otto reti

____

____

____

____

____

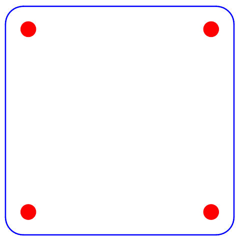
____

____

____

3. Quali caratteristiche geometriche presenta la rete più breve?

4. Pensi che i quattro punti possano essere collegati da una rete ancora più breve?
   Se pensi di **sì**, disegnala nella figura sottostante; se ritieni di **no**, motiva la tua risposta.

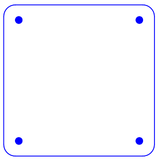


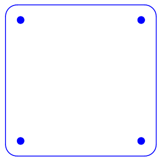
CLASSE IIC SCHEDA DI LAVORO n°4

Data: ………………..... Alunni: …………………………………………………………………

1. Secondo te, quale forma avrà la lamina di sapone che si ottiene immergendo interamente la lastrina con i quattro pioli nell'acqua saponata?

   Rappresenta la tua ipotesi nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.





   Quali caratteristiche geometriche presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente?

2. Riconosci delle analogie con la configurazione ottenuta usando la lastrina a tre pioli?

   Ci sono anche delle differenze?

3. Verifica che la rete disegnata nella nuova tessera che ti è stata consegnata è più corta delle precedenti.

   La sua lunghezza è $L =$ ________________ .

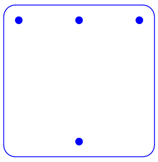
   Secondo te, fra <u>tutte</u> le possibili reti che collegano i vertici del quadrato, ce n'è qualcuna ancora più corta? Cosa te lo fa pensare?

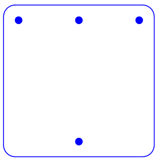
CLASSE IIC SCHEDA DI LAVORO n°5

Data: ………………..... Alunni: ………………………………………………………………

1. Secondo te, quale forma avrà la lamina di sapone che si ottiene immergendo interamente nell'acqua saponata la nuova lastrina con i pioli che disegnano una **T**?

   Rappresenta la tua congettura nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.





Quali caratteristiche geometriche presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente?

____

____

____

____

____

2. Riconosci delle analogie con le configurazioni ottenute con le lastrine precedenti?

____

____

____

____

Quali le differenze?

____

____

____

____

Problemi concernenti la riflessione proposti alla scuola media[5]

Elena Cosser, Istituto Comprensivo Vigolo Vattaro

Come si possono proporre problemi di massimo e di minimo in una scuola media?

Prerequisiti

Per affrontare l'unità di apprendimento, ho valutato fosse necessario che gli alunni avessero conoscenza di alcuni argomenti e competenze specifiche:

- Unità didattica "La luce" già affrontata in Scienze durante l'anno precedente;
- Teorema di Pitagora;
- Uso di un linguaggio matematico astratto.

Obiettivi

Per la presente attività mi sono prefissata obiettivi sia di carattere generale, che disciplinare.

Obiettivi didattici generali dell'argomento

- Avvicinare gli studenti fin dalla Scuola Secondaria di primo grado ai concetti di massimo e minimo che si incontrano in molteplici aspetti delle scienze, ad esempio in fisica collegati al concetto di energia o in ingegneria nei problemi di ottimizzazione, o in matematica nei problemi variazionali (e.g. lo studio delle superfici minime).
- Rafforzare i legami fra geometria e calcolo, due modi complementari di guardare ai problemi, alla loro comprensione e risoluzione proponendo problemi ambientati in un contesto geometrico familiare.
- Far toccare con mano il processo di costruzione di un modello matematico idoneo a descrivere il fenomeno osservato ai fini di modellizzarlo formalmente.
- Far comprendere il concetto di dimostrazione matematica, applicato ad un problema di geometria sintetica.
- Far applicare il metodo scientifico proponendo dei percorsi strutturati (supposizione di eventi – ipotesi, esercitazione pratica – esperimento, confronto – verifica).
- Collegare fenomeni e discipline diverse.

Obiettivi didattici disciplinari

- Applicare il Teorema di Pitagora in situazioni reali.
- Saper tracciare la tangente ad una curva.
- Conoscere l'ente geometrico ellisse.
- Riuscire a comparare segmenti in modo teorico.
- Esprimere matematicamente i fatti collegati alla legge di riflessione.
- Sapere cosa si intende per immagine virtuale e dove si forma (per esempio in uno specchio).

Strumenti e metodologie utilizzati

Strumenti

Come anticipato nella sezione precedente, i principali strumenti utilizzati (le cui fotografie sono riportate in Figura 1 e 2) non fanno parte della normale dotazione scolastica, ma sono stati appositamente presi in prestito per il progetto in corso. Il loro utilizzo ha suscitato grande interesse nei ragazzi, dapprima per l'aspetto tecnologico e poi per quello didattico; interessante è stato anche

[5] Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 4

il confronto che gli stessi alunni hanno fatto tra il piccolo laser di mia proprietà e quello usato per il presente laboratorio.

- Biliardino ellittico (Figura 1);
- Dispositivo Laser orientabile (Figura 2);
- Specchio piano con goniometro (Figura 2);
- Stuzzicadenti da spiedini;
- Plastilina.

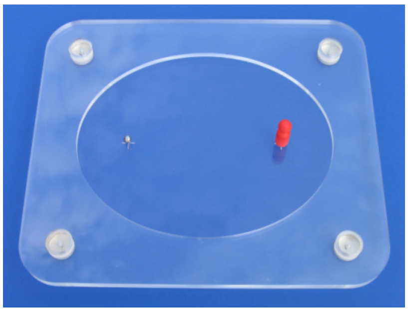


Figura 1: Biliardino ellittico in plexiglas

Figura 2: Dispositivo laser con specchio piano

Scelte metodologiche

Se la modalità generale è ovviamente quella del lavoro a gruppi, alcune scelte per così dire tecniche rivestono un'importanza rilevante anche ai fini di un buon esito dell'attività proposta. In questo contesto, il tipo di composizione dei gruppi di lavoro è un elemento chiave. La mia scelta è stata quella di formare 4 gruppi omogenei da 4 alunni ciascuno: un gruppo A formato dai 4 alunni con competenze matematiche superiori agli altri; un gruppo D formato dalle 4 persone con più difficoltà in matematica; gli altri due gruppi B, C sono relativamente equivalenti (fascia media della classe). Tale suddivisione è stata così concepita principalmente per permettere a tutti di arrivare ad un obiettivo comune a tutta la classe attraverso percorsi differenziati per tener conto delle diverse capacità; più teorico per i gruppi A e B e più sperimentale per C e D, dove l'attribuzione del task per B e C è stata pressoché casuale. In particolare, la scheda preparata da me (vedi Allegato 3) prevedeva la risoluzione sul foglio (quindi attraverso un modello teorico) per i più bravi, mentre una risoluzione di tipo pratico (mediante pioli e pannello di legno) per gli altri due gruppi.

Un'altra scelta metodologica che ho adottato è stata quella di stimolare gli alunni a sfruttare le loro conoscenze pregresse provenienti da una disciplina affine durante il percorso didattico di formalizzazione delle leggi della riflessione. Di conseguenza, ho cercato in molte occasioni di portarli a richiamare nozioni e concetti legati al comportamento della luce, alle caratteristiche degli specchi piani (da loro studiati l'anno precedente in Scienze) e alle caratteristiche di oggetti matematici studiati nell'anno in corso e precedentemente.
Termino ricordando che alla parte sperimentale ha partecipato la dottoressa Antonia Romano, insegnante della Scuola Secondaria di Primo Grado distaccata presso l'IPRASE e designata come referente IPRASE per il progetto Matematica in Laboratorio. Come già anticipato nella premessa la presenza in classe di un esperto esterno non solo è di aiuto pratico durante la parte sperimentale, ma riveste un ruolo importante nell'osservare e raccogliere commenti durante lo svolgimento delle attività nei diversi gruppi che altrimenti rischierebbero di andare perdute e che difficilmente un'unica persona sarebbe in grado di fare altrettanto efficacemente. Inoltre nella successiva fase di

discussione l'esperto esterno diventa un altro interlocutore oltre all'insegnante nell'elaborare le osservazioni raccolte.

Struttura unità di apprendimento

Le attività proposte per il Laboratorio Riflessione prevedevano la somministrazione di due Schede C1 e C2 (Allegati 1 e 2), la prima prevalentemente sperimentale, la seconda più teorica. Per adattare il percorso alle esigenze didattiche della classe ho pensato di aggiungere due ulteriori Schede M1 e M2 (Allegati 3 e 4) per attività laboratoriali preparate da me.

La Scheda M1 funge da collegamento con l'argomento "La luce" trattato durante l'anno scolastico passato e la Scheda M2 guida gli alunni nel toccare con mano l'effettiva posizione dell'immagine virtuale di un oggetto allo specchio. Trattandosi di allievi di terza media, e quindi a mio parere con la necessità di sottolineare alcuni passaggi più dettagliatamente, ho optato per suddividere la Scheda C1 in due parti, presentando gli Esercizi 1, 2, 3 in una prima fase, e l'Esercizio 4 successivamente alla Scheda M1. A seguire viene somministrata la Scheda M2 ed infine la Scheda C2, anch'essa suddivisa in due momenti: inizialmente gli Esercizi 1 e 2, quindi gli Esercizi 3 e 4. Il percorso si conclude con la Verifica V (Allegato 5).

In dettaglio l'attività risulta essere così strutturata:

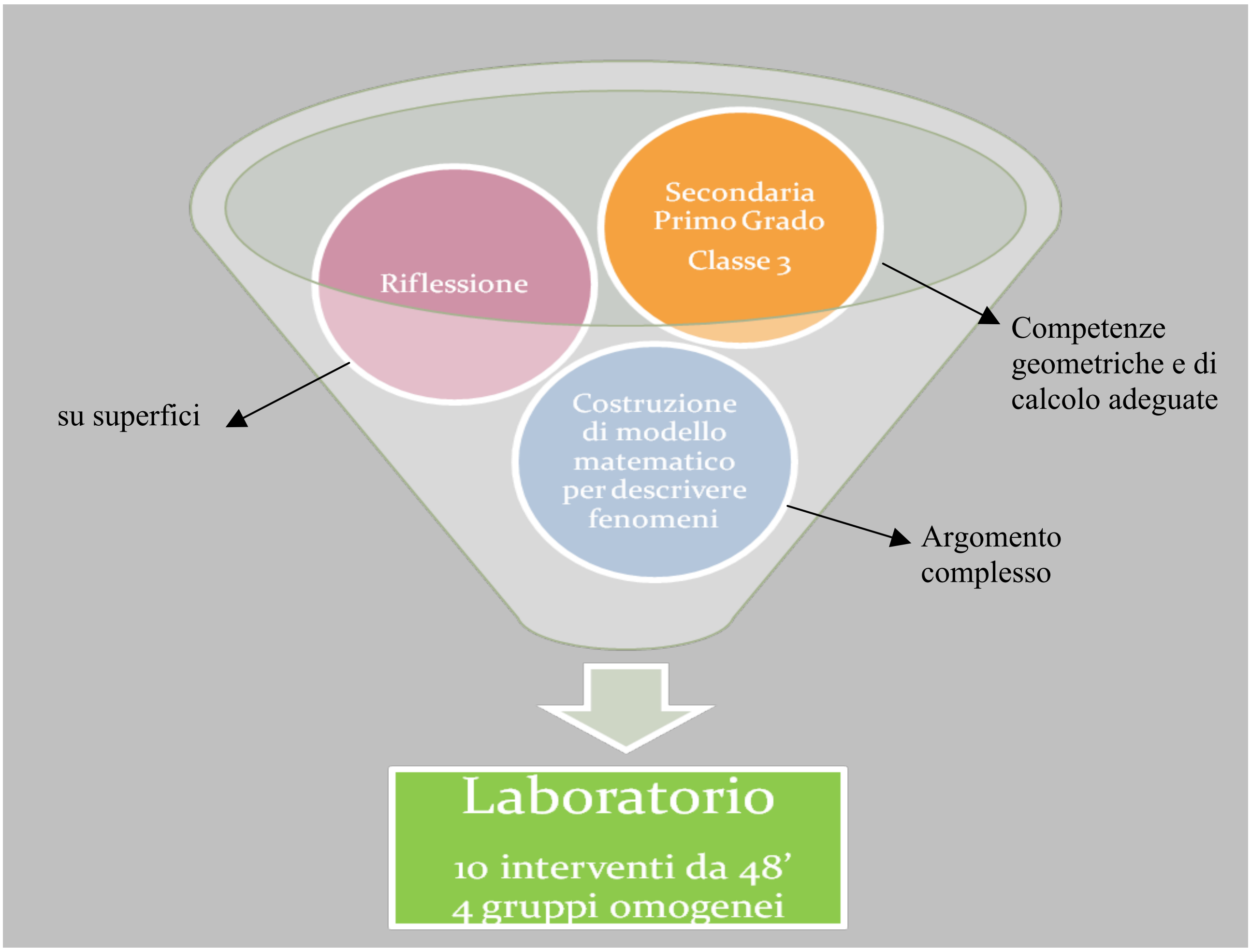
- Laboratorio biliardino ellittico (Esercizi 1, 2, 3 della Scheda C1 proposta nel progetto); i tre esercizi proposti vogliono mettere in evidenza attraverso i rimbalzi di una pallina nel biliardo ellittico le caratteristiche geometriche delle traiettorie percorse in caso di urti elastici. La scheda non è stata modificata, in quanto mi sembrava adeguata alle conoscenze dei ragazzi e proposta con un linguaggio semplice e comprensibile. Lo svolgimento prevede l'applicazione del metodo scientifico: è proposto un quesito, viene richiesta la supposizione di eventi (formulazione di una ipotesi), una successiva esercitazione pratica (esperimento) ed infine il confronto con le proprie supposizioni (verifica dell'ipotesi).

  Tempo impiegato: 1 intervento in laboratorio (si può dire un'ora di laboratorio).
- Percorso minimo (Esercizi 1, 2, 3, 4, 5); problemi preparati da me per collegare la ricerca di un percorso di minima lunghezza (Esercizi 1, 2, 3) con la legge di riflessione (Esercizi 4, 5); questi esercizi sono risolubili seguendo un percorso sequenziale di domande proposte. Questa è l'attività che mi ha convinto ad utilizzare i gruppi omogenei, in quanto gli stessi esercizi sono stati presentati ai diversi gruppi in maniera differente: ai gruppi A e B è stato dato il disegno relativo alla situazione problematica, mentre ai gruppi C e D è stato dato un pannello quadrato di legno, di 30 cm di lato, in cui la situazione era presentata con chiodini piantati. La modalità di presentazione del problema ha orientato gli alunni ad una risoluzione computazionale per i gruppi A e B, e ad una risoluzione pratica per i gruppi C e D.
  Tempo impiegato: 2 interventi in laboratorio.
- Laboratorio con dispositivo laser (Esercizio 4 della Scheda C1 proposta nel progetto); per verificare la legge di riflessione. Anche in questo caso ho mantenuto inalterata la scheda proposta, e lo svolgimento prevede nuovamente l'applicazione del metodo scientifico.
  Tempo impiegato: 1 intervento in laboratorio.
- Attività del cacciatore per trovare il punto di riflessione, ovvero trovare il punto in cui si forma l'immagine virtuale di un oggetto allo specchio. La scheda che avevo ipotizzato inizialmente doveva solo fungere da rinforzo al concetto di immagine virtuale già studiata dai ragazzi l'anno precedente, ma mi sono resa conto che parecchi non la ricordavano nemmeno, e altri non ne

erano veramente convinti, come se fosse una regola magica da imparare a memoria.
Tempo impiegato: 2 interventi in laboratorio.

- Verifica con il laser dell'esattezza del punto di riflessione trovato con il metodo del cacciatore. Tempo impiegato: 1 intervento in laboratorio.
- Esercizi 1 e 2 della Scheda C2 proposta nel progetto. Il primo prevede la ricerca del punto di riflessione non in una situazione pratica ma tramite l'applicazione dei concetti appresi sperimentalmente in un esercizio teorico mediante una costruzione geometrica. Il secondo fa da collegamento fra il comportamento della riflessione su una superficie curva e su una superficie piana riconducendosi così ad una situazione nota: nel punto di contatto con la pallina la sponda del biliardo (superficie curva) può essere sostituita con la sua tangente (superficie piana).
Tempo impiegato: 1 intervento in laboratorio
- Punto della situazione a classe intera; ho pensato di svolgere io la dimostrazione del fatto che il percorso APB è il minore, visto che non hanno ancora dimestichezza con le dimostrazioni.
Tempo impiegato: 1 intervento in classe.
- Verifica a conclusione dell'argomento.
Tempo impiegato: 1 intervento in classe.

Introduzione

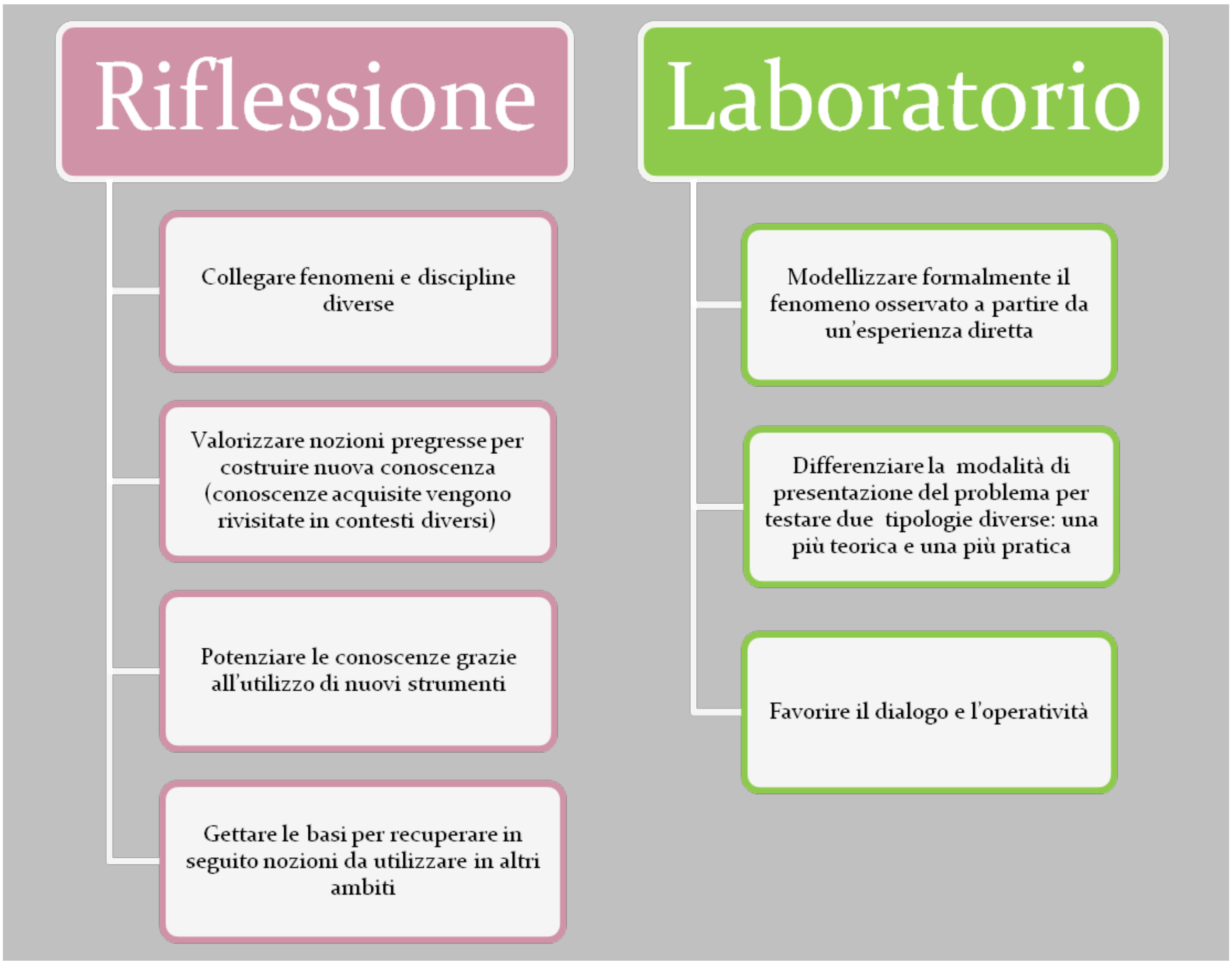


Un'unità didattica sulla riflessione era già stata svolta l'anno precedente in scienze: la classe era una terza scuola media e le competenze geometriche e di calcolo si potevano ritenere adeguate.

Si doveva però affrontare la complessità della costruzione di un modello matematico (anche se semplificato) per descrivere un'ampia varietà di fenomeni e comunque veniva affrontata per la prima volta la distinzione fra modello matematico e fenomeno fisico da descrivere a partire da un esperimento.

In particolare affrontando la riflessione si voleva:

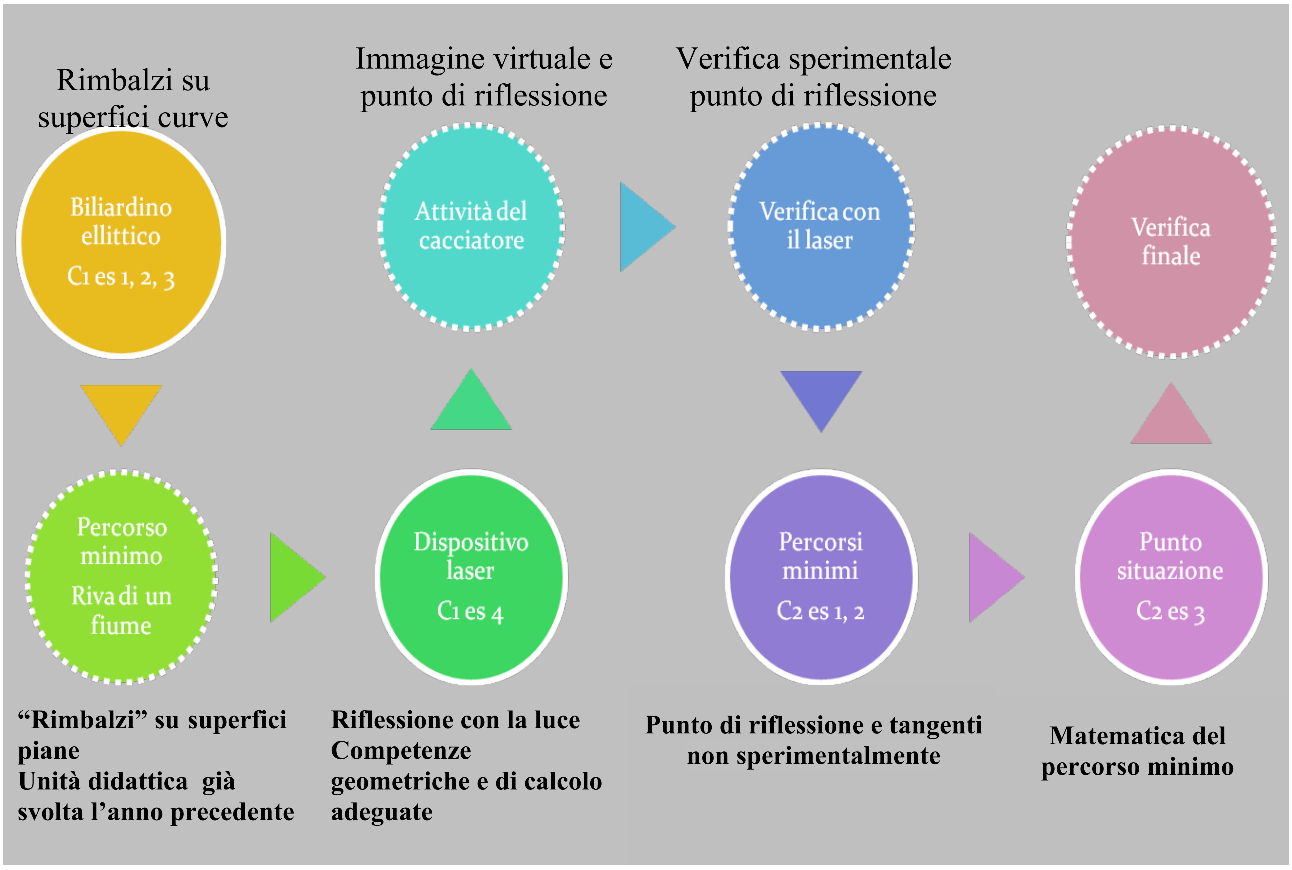
- mostrare collegamenti fra fenomeni, argomenti e anche discipline diverse;
- valorizzare e recuperare conoscenze precedenti e rivisitarle in contesti diversi;
- potenziare tali conoscenze, grazie anche all'utilizzo di nuova strumentazione fisica (quale il laser e lo specchio per la riflessione), ma anche concettuale (quale la matematizzazione della situazione fisica, approccio non sempre utilizzato in una terza media);
- gettare anche le basi per il successivo recupero di tali nozioni in altri ambiti (la riflessione come fenomeno ottico, nel corso di fisica alle superiori).



L'introduzione del laboratorio matematico in classe ha permesso di

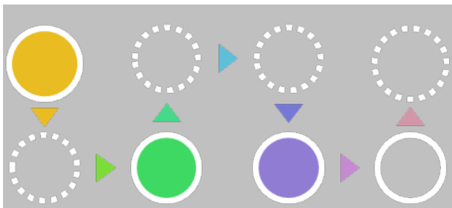
- modellizzare un fenomeno a partire da esperienze concrete e significative;
- differenziare le modalità di presentazione dei problemi, da approcci più teorici ad altri più concreti;
- favorire il dialogo fra gli studenti, ma anche fra studenti e docente;
- favorire la manualità operativa.

Il percorso

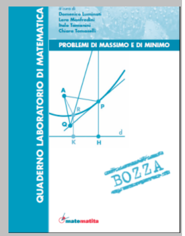


Il percorso si è sviluppato toccando i seguenti punti:

- si è iniziato con le esperienze sul biliardino ellittico previste dalla scheda C1 (dove veniva affrontato l'argomento dei rimbalzi su linee curve),
- poi si sono trattati i percorsi minimi per raggiungere la riva di un fiume (dove veniva affrontato l'argomento dei rimbalzi su linee rette),
- quindi si è usato il dispositivo laser per affrontare la riflessione con la luce,
- si è affrontata la tematica relativa alle immagini che appaiono su uno specchio usando come situazione stimolo quella di un cacciatore che usi un fucile laser e si sono verificati i risultati con l'uso, da parte del docente, del dispositivo laser,
- così si è poi potuta affrontare la scheda C2 dove si devono tracciare delle tangenti per poter capire la riflessione su linee non rette,
- quindi si è introdotta la dimostrazione geometrica del fatto che il percorso è proprio minimo come svolta nel quaderno Laboratorio di matematica,
- nella verifica finale sono state riproposte le principali tematiche introdotte nel percorso (immagine virtuale e sua determinazione operativa, raggio riflesso: individuazione e sue proprietà, rimbalzi sul biliardino ellittico, definizione formale di ellisse).



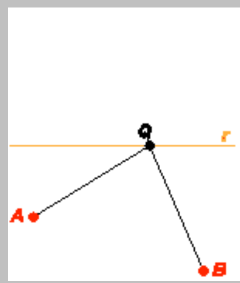
Attività tratte da



RIMBALZI
(sperimentale)

RIFLESSIONE
(sperimentale)

APPLICAZIONE
(teorica)

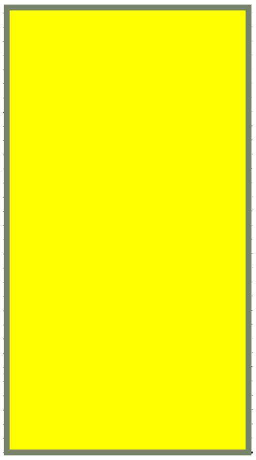


legame tra
rimbalzo su superficie curva e
riflessione su superficie piana

ricerca non solo
sperimentale del punto
di riflessione

Allegato 3 - Percorso minimo

1) Immagina di trovarti in A con un secchio vuoto e devi portarlo in B pieno d'acqua passando dal fiume. Sai che AB=80m e AH=BK= 30m.
   a) Quanti sono i tragitti che puoi fare?
   b) Ci sono delle differenze fra i vari tragitti?
   c) Disegnane 5 e calcola la lunghezza di ogni percorso.
   d) C'è un percorso "minimo" (che ti permette cioè di fare meno strada)? Qual è?
   e) Che caratteristiche geometriche ha?



2) Ora il punto di partenza è lo stesso, ma il punto di arrivo è C. Rispondi ancora alle domande **a)- e)**.

3) Anche in questo caso devi andare da A a D passando per il fiume. Rispondi alle domande **a)**, **b)**, **c)** e poi alle seguenti:
   d) Riesci ad individuare esattamente il percorso minimo?
   e) Che caratteristiche ha?

Se non riesci a trovarlo esattamente, o non sei sicuro che sia quello giusto ricordati di ciò che hai studiato l'anno scorso: LA LUCE PERCORRE IL CAMMINO PIU' BREVE SENZA FARE CALCOLI.

4) Rimettiti nella situazione 1), usa il laser acceso in A e puntandolo contro lo specchio-fiume prova a colpire il punto B ricalcando i percorsi che avevi trovato tu.
   a) Tutti i percorsi che hai disegnato prima ti permettono di colpire B con il laser?
   b) Quali lo colpiscono?

5) Rimettiti nella situazione 2), usa il laser acceso in A e puntandolo contro lo specchio-fiume prova a colpire il punto C.
   a) C'è un unico percorso che ti permette di colpire C?
   b) Che caratteristiche ha?

Immagine virtuale e punto di riflessione

- Attività sperimentale con necessità di buona base teorica
- Pensata come rinforzo, è poi diventata attività necessaria

Allegato 4 – Attività del cacciatore

TROVARE IL PUNTO DI RIFLESSIONE – TROVARE IL PUNTO IN CUI SI FORMA L'IMMAGINE VIRTUALE DI UN OGGETTO ALLO SPECCHIO;

1. Utilizzando lo specchio piano in dotazione, immagina di mettere un oggetto sul piano e vedere la sua immagine allo specchio, sai dove si forma l'immagine virtuale di tale oggetto?

2. Prendi ora due stuzzicadenti da spiedini, e della plastilina per fissarli al piano di lavoro Pianta uno spiedino davanti allo specchio e prova a far combaciare perfettamente la sua immagine nello specchio con l'altro spiedino, spostandoti e scegliendo più posizioni di osservazione. Da che parte dello specchio si forma l'immagine virtuale?

3. Quando hai trovato il punto che ti permette di vedere combaciare l'immagine allo specchio con il secondo spiedino da tutte le posizioni segna i due punti (dove hai piantato il primo spiedino e dove hai piantato il secondo) usando la plastilina. Rifa l'esperimento altre due volte mettendo gli spiedini iniziali in diversa posizione.
   Cosa puoi notare della posizione degli spiedini?

4. Cosa puoi dire della posizione dell'immagine virtuale di un oggetto allo specchio?

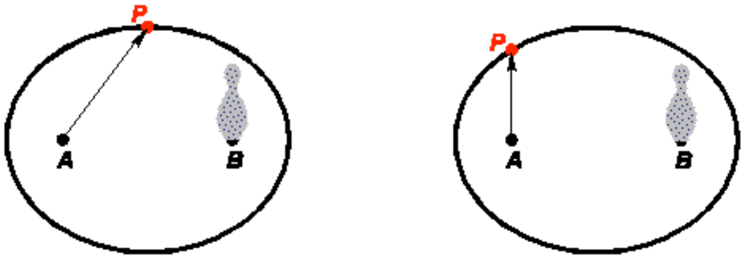
5. Ora togli lo specchio e disegna il segmento che collega il laser con la posizione dell'immagine virtuale del primo spiedino. Rimetti lo specchio e prova a indirizzare i laser lungo questo segmento. Cosa puoi notare?

6. Quindi per trovare il punto di riflessione che mi permette di colpire un bersaglio sparando il laser allo specchio opero nel seguente modo:

Attività tratta da

Ricondurre a una situazione nota: il concetto di tangente

2. Nelle due figure che seguono, riesci a immaginare una sponda rettilinea (una retta passante per *P*) che produrrebbe lo stesso rimbalzo del biliardino? Prova a disegnarla.

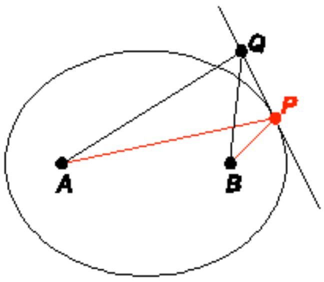


Cosa puoi dire di queste due rette?

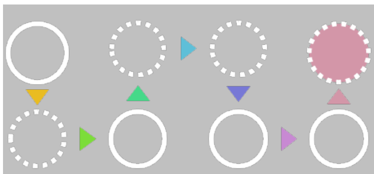
Attività tratta da

Dimostrazione geometrica per il percorso minimo

3. La figura che segue rappresenta un'ellisse avente fuochi nei punti *A* e *B*, insieme alla sua tangente in *P*.



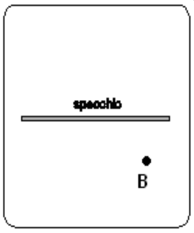
Fra tutti i percorsi che collegano *A* con *B* rimbalzando su *r*, come ad esempio *AQB*, il più corto è proprio *APB*. Sapresti dire perché?



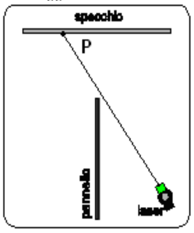
Verifica

- Q1. immagine virtuale e sua determinazione operativa ☺
- Q2. raggio riflesso: individuazione e sue proprietà ☺
- Q3. rimbalzi sul biliardino ellittico ☺
- Q4. definizione formale di ellisse

1) Nell'immagine qui sotto è disegnato uno specchio visto dall'alto con un oggetto B che sta davanti allo specchio. Disegna il punto dove si forma l'immagine virtuale dell'oggetto B e descrivi accanto alla figura come hai fatto a trovarlo.



2) Nell'immagine qui sotto è disegnato l'apparato sperimentale utilizzato nell'attività sulla riflessione. Dal laser parte un raggio luminoso che colpisce lo specchio nel punto P. Disegna il raggio riflesso. Quale caratteristica ha?



3) Abbiamo visto che dato un biliardo ellittico come in Figura 1, se colpiamo una pallina posta nel fuoco A e la indirizziamo verso un punto P qualsiasi del bordo, riusciamo sempre a colpire il birillo posto nel secondo fuoco B. Cosa succede alla pallina se invece è posizionata in C? Riesce a colpire il birillo B? Spiega come fai a trovare la traiettoria corretta.

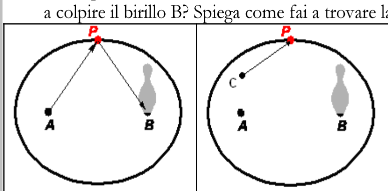


Figura 1 Figura 2

4) La definizione di una circonferenza è: "La circonferenza è *il luogo dei punti che si trovano alla* **sta** *distanza da un punto fisso detto centro*". Dai qui di seguito la definizione di ellisse:


Uso di strumentazione non comune come fattore di novità
Scelta di gruppi omogenei per coinvolgimento attivo di tutti
Rivisitazione in ambito diverso permette di colmare eventuali lacune rimaste
Il contesto della situazione pratica talvolta può distrarre dall'essenza

Tabelle riassuntive dell'attività

<table>
<tr><th>ATTIVITA’</th><th>ANALISI A PRIORI</th><th>ANALISI A POSTERIORI</th><th>OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE</th></tr>
<tr><td colspan="4">BILIARDINO ELLITTICO</td></tr>
<tr><td>Quesito 1</td><td>La simmetria della situazione dovrebbe suggerire che il birillo venga abbattuto.</td><td>Effettivamente tutti gli alunni rispondono che il birillo verrà colpito:
- tanti nominano la “stessa inclinazione” (altri “angolazione”) di A e B rispetto a P senza dare altre informazioni;
- alcuni per motivare tale inclinazione disegnano già la tangente ma non la nominano.</td><td>Nella discussione comprendo che parlano di stessa angolazione intendendola per ragioni di simmetria.</td></tr>
<tr><td>Quesito 2</td><td>Lo studente non ha strumenti per individuare la risposta corretta a priori e la simmetria può addirittura essere fuorviante.</td><td>Non tutti gli alunni rispondono correttamente:
- alcuni dicono che il birillo non verrà colpito;
- altri indicano già che verrà colpito ovunque sia P (anche se non richiesto) riconoscendo che la forma del biliardino possa essere influente;
- alcuni attribuiscono il passaggio nel punto B all’influenza della forma del biliardino e anche alla forza impressa alla biglia.</td><td>Una delle risposte è stata: “Dipende dalla forza con cui colpiamo la palla”. Questa obiezione, per quanto perfettamente motivata dal particolare apparato sperimentale scelto, è del tutto estranea al concetto ed alle proprietà della riflessione che l’esperimento voleva evidenziare, appartenendo piuttosto alla sfera delle questioni riguardanti l’attrito – che ovviamente si sarebbe dovuto premettere essere nullo in questo esperimento ideale.</td></tr>
<tr><td>Quesito 3</td><td>Sulla base degli esperimenti eseguiti nei Quesiti 1 e 2 e tenendo conto della simmetria, gli studenti dovrebbero indicare almeno 6 o 7 possibili traiettorie.</td><td>In tutti i gruppi la risposta è corretta e completa e le traiettorie riconosciute sono infinite. Anche in questo caso alcuni imputano influenze alla forza impressa.</td><td>Un’alunna parla di cerchio per esprimere la forma curva del biliardino, ciò mi permette di riprendere la definizione di circonferenza e chiedere loro di cercare di descrivere in cosa si differenzia la forma del biliardino da tale definizione.</td></tr>
</table>

ATTIVITA'	ANALISI A PRIORI	ANALISI A POSTERIORI	OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE
ESEMPIO PERCORSO MINIMO			
Esercizio 1	La caratteristica geometrica del percorso minimo proposta dagli alunni dovrebbe essere il punto medio (senza tener conto degli angoli coinvolti).	I due gruppi sperimentali (che hanno lavorato con il pannello di legno e il filo) indicano il cammino minore come quello passante per il punto medio e descrivono le caratteristiche geometriche nominando un triangolo isoscele. Un altro gruppo indica solo gli estremi dei segmenti per indicare il percorso minimo ma non ne da nessuna caratteristica geometrica. Un gruppo indica gli estremi e anch'esso mette in evidenza che si forma un triangolo isoscele.	Una delle obiezioni dei ragazzi è stata che non aveva molto senso cercare il cammino più corto *tout court*, ma il cammino più corto che si doveva fare col secchio pieno, visto che camminare con il secchio vuoto comporta sicuramente meno sforzo. L'obiezione, per quanto intelligente, è relativa più al concetto fisico di lavoro lungo un cammino che al concetto di cammino minimo e riflessione ed è dovuta alla particolare situazione in cui ho collocato il problema. La discussione a classe intera porta ad evidenziare che i 4 gruppi hanno trovato lo stesso punto anche attraverso procedimenti differenti.
Esercizio 2	Una volta trovata la soluzione minima, la descrizione geometrica dovrebbe scaturire per analogia con la figura precedente, ovvero notando la conservazione del cammino minimo dell'Esercizio 1 (iniziare a supporre che gli angoli siano l'elemento chiave).	Gli alunni del gruppo C hanno notato l'analogia perché le traiettorie erano proprio costruite una sull'altra. Gli alunni del gruppo D nonostante le traiettorie costruite una sull'altra non hanno collegato i due esercizi. I gruppi A e B non hanno collegato i due esercizi.	I gruppi A e B utilizzando l'approccio teorico non sono riusciti a notare (a differenza dei gruppi C e D) che le traiettorie degli Esercizi 1 e 2 coincidevano. I due gruppi C e D usano il filo in maniera diversa: - Il gruppo C misura tutti i percorsi con il filo e associa il percorso più corto con la lunghezza minima del filo; - Il gruppo D prende una lunghezza fissa per il filo (un metro) e associa il percorso più corto con la lunghezza massima del filo rimanente.
Esercizio 3	Generalizzando quanto supposto per gli Esercizi 1 e 2 gli studenti dovrebbero ipotizzare che il cammino trovato sia quello con gli angoli (di riflessione e di incidenza) uguali.	La generalizzazione non riesce: I gruppi A e B riescono a trovare il cammino minimo computazionalmente, ma non ne spiegano le caratteristiche geometriche. Il gruppo D rimane spiazzato, "il percorso non forma un triangolo isoscele". Il gruppo C non risponde.	Gli alunni del gruppo D sono ancora legati al concetto di punto medio come risolutore; nonostante usino il triangolo isoscele, non hanno considerato che questo ha anche angoli uguali, si sono concentrati solo sui suoi lati.
Esercizio 4 **Esercizio 5**	L'esperimento e il comportamento della luce dovrebbero inferire che il percorso più breve è quello determinato dall'uguaglianza degli angoli.	Tutti i gruppi riescono a determinare quale sia il percorso unico, ma non riescono a generalizzarne le caratteristiche geometriche in termini di uguaglianza di angoli.	Nessun gruppo nemmeno ipotizza una possibile risposta al quesito 5b. L'intuizione fisica risulta probabilmente più immediata della descrizione matematica.

ATTIVITA’	ANALISI A PRIORI	ANALISI A POSTERIORI	OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE
LASER			
Quesito 4a	Già conoscendo la legge di riflessione della luce, gli studenti dovrebbero farne solo pratica.	Gli alunni hanno sperimentato più traiettorie.	Dietro mio suggerimento, la misurazione degli angoli nelle varie traiettorie li ha portati verso la conclusione corretta.
Quesito 4b	Dovrebbero ricordare la costruzione geometrica necessaria.	Tutti gli alunni hanno tracciato una traiettoria sbagliata.	Mi accorgo che le traiettorie dei gruppi sono in realtà la stessa: ne deduco che il disegno del laser sembra individuare già la direzione in cui esso dovrà puntare: questo probabilmente ha indotto praticamente tutti gli alunni a “seguire” tale direzione come se facesse da guida. Capisco dai discorsi che fanno che vorrebbero trovare angoli uguali, ma non hanno la minima idea di come si potrebbe fare. Chiedo loro se hanno mai sentito parlare di immagine virtuale, e spiego cosa significa: - parecchi non ricordano minimamente di averla sentita; - chi ricorda sembra che non ci creda veramente, come se fosse una regola magica da imparare a memoria.

ATTIVITA'	ANALISI A PRIORI	ANALISI A POSTERIORI	OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE
ATTIVITA' CACCIATORE			
Domande 1 e 2	Le attività dovrebbero fare da rinforzo pratico del concetto già noto di immagine virtuale.	La risposta (sbagliata) è pressoché unanime: "sullo specchio"!	Li aiuto facendo riflettere che più una immagine è piccola più essa è lontana, se ci si allontana dallo specchio, si vede la nostra immagine rimpicciolirsi e si vede che lo stesso numero di piastrelle che c'è fra noi e lo specchio c'è anche fra lo specchio e la nostra immagine.
Domanda 3	Gli alunni dovrebbero capire che l'immagine di un oggetto allo specchio è una sola ed è posta in un punto solo, indipendentemente dalla posizione dell'osservatore.	Gli alunni sono molto perplessi, non riescono a capire che la posizione è davvero unica, sia perché far cercare a ogni alunno più posizioni li annoia, sia perché la precisione va via via diminuendo.	In itinere ho modificato tale consegna chiedendo a più alunni di osservare lo stesso oggetto nella stessa situazione e cercare la posizione del secondo spiedino che lo facesse combaciare per tutti con l'immagine allo specchio. Questa modifica ha convinto gli alunni dell'unicità di tale posizione.
Domanda 4	Gli alunni dovrebbero riuscire a descrivere la posizione del punto.	Una volta trovate le immagini di più punti, la descrizione della posizione si è rivelata piuttosto semplice.	Le conoscenze fin qui acquisite permettono loro di dare una descrizione formalmente corretta della posizione.
Domanda 5	Tale quesito fa da verifica sperimentale.	Stupiti hanno osservato che il laser colpiva esattamente lo spiedino.	Lo stupore mostra che in questo caso non avevano compreso quale fosse l'utilità del determinare la posizione dell'immagine virtuale.
Domanda 6	Dovrebbero riuscire a riassumere tutto il processo.	Tutti gli alunni riassumono correttamente la procedura.	Un buon risultato in questa domanda era fondamentale per proseguire con i punti seguenti dell'attività.

ATTIVITA’	ANALISI A PRIORI	ANALISI A POSTERIORI	OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE
PERCORSI MINIMI			
Quesito 1	Sulla base dell’esperimento precedente dovrebbero individuare la risposta corretta e le giuste motivazioni.	Quasi tutti riescono ad individuare il punto di riflessione, solo due persone non disegnano correttamente la perpendicolare allo specchio e di conseguenza non trovano il punto esatto.	Anche coloro che non hanno disegnato correttamente la perpendicolare hanno interiorizzato (dalle loro parole) quale fosse la procedura corretta per trovare il punto di riflessione.
Quesito 2	Nel primo disegno la risposta deriva dalla simmetria, mentre nel secondo caso la simmetria non aiuta, ed è necessario generalizzare.	I gruppi A e B disegnano correttamente le due tangenti e le nominano correttamente. Il gruppo C nomina correttamente le tangenti ma disegna correttamente solo la prima. Il gruppo D è aiutato da me perché non riesce a disegnare le tangenti.	Emergono livelli diversi di difficoltà: alcuni non hanno nemmeno l’intuizione fisica, altri la hanno ma non riescono a formalizzarla nel concetto di tangente, mentre solo alcuni hanno padronanza di entrambi i concetti.
Quesito 3 (a classe intera)	La dimostrazione che APB è minore di AQB qualsiasi sia Q mi sembra difficile, non tutti gli alunni sono in grado di astrarre così tanto.	Alcuni seguono la dimostrazione e sembrano seguire le argomentazioni, capendo i passaggi logici. Qualcuno chiede perché è necessario prendere Q. Qualcuno dice: “ma non basta misurare?”.	Come previsto questo è il passaggio più difficile dell’attività e il concetto di dimostrazione è ancora piuttosto lontano dagli alunni di una secondaria superiore di primo grado.
Quesito 4 (a classe intera)	Questo quesito mi permette di puntualizzare il concetto di approssimazione lineare mediante la tangente di una superficie curva.	Sebbene guidati dall’insegnante, molti alunni hanno dato la risposta corretta.	Intuitivamente tale concetto è già presente in un buon numero di alunni e sembra piuttosto naturale anche a chi non lo aveva già considerato.

ATTIVITA'	ANALISI A PRIORI	ANALISI A POSTERIORI	OSSERVAZIONI E DISCUSSIONE
VERIFICA			
Esercizi 1-4	I quattro esercizi ricalcano lo schema dell'esperimento. Ho scelto tre quesiti che riproponevano situazioni viste sperimentalmente ed uno teorico. I quesiti sperimentali si focalizzavano su tre punti di cui ho ritenuto fondamentale verificare la comprensione: la ricerca dell'immagine virtuale, la rappresentazione della traiettoria del raggio riflesso su una superficie piana e l'analogo su una superficie curva. Il quesito teorico richiedeva di dare la definizione di ellisse a partire dalla definizione di circonferenza. La risposta a questo tipo di quesito richiede un livello di formalizzazione matematica piuttosto elevato per le competenze di un alunno di terza media. Ho scelto comunque di provare a sottoporre loro questa domanda per verificare se l'attività condotta avesse permesso di ottenere questo livello di formalizzazione, o, almeno, quanti alunni lo avessero raggiunto. Per come è strutturata, la verifica dovrebbe servire agli alunni come momento di sintesi.	Le risposte sono state globalmente accettabili: in particolare, il primo quesito è stato sviluppato soddisfacentemente, il secondo è risultato verbalmente corretto ma graficamente impreciso, il terzo è stato svolto in maniera corretta ma imprecisa, mentre il quarto quesito è risultato troppo difficile.	Inizialmente progettata per essere somministrata individualmente, dopo alcuni minuti di svolgimento, durante i quali ho notato una certa difficoltà nell'elaborare le risposte, ho preferito permettere agli studenti di affrontare la verifica a coppie per agevolare il confronto. La scelta si è mostrata adeguata dal momento che anche chi inizialmente non era sufficientemente sicuro di sé per dare una risposta, nel confronto con il compagno si è mostrato propositivo. I quesiti, infatti, sono stati risolti con cura e chiarezza espositiva, tranne il quarto, che richiede un commento a parte. Infatti, nonostante la difficoltà, tutti comunque hanno tentato di formulare una risposta a tale quesito, ma il ragionamento seguito non era corretto. Ho deciso quindi successivamente di riprendere con loro la costruzione dell'ellisse senza però focalizzarmi sulla definizione formale che ho valutato essere al di là degli scopi dell'attività del laboratorio in questione. Come osservazione finale posso aggiungere che forse l'introduzione di un ulteriore quesito sperimentale (la ricerca della traiettoria per colpire un birillo dato – da proporre come esercizio numero 3) avrebbe potuto essere un utile tassello per completare il percorso di sintesi.

Scuola secondaria di secondo grado

Cristina Bonmassar, Liceo “Leonardo Da Vinci” - Trento

Fulvio Torresani, ITCG e Industriale "Antonio Pilati" - Cles

Giancarlo Dorigotti, ITCG "Fontana" - Rovereto

Maddalena Litterini, Liceo Scientifico “Galileo Galilei” Trento

Roberta Scarpa, Liceo “Antonio Rosmini” - Trento

Patrizia Franzoni, Liceo “Antonio Rosmini” Trento

Il primo anno di sperimentazione nelle secondaria superiore

Inizialmente tutti i docenti hanno lavorato sul laboratorio relativo ai problemi isoperimetrici e di area minima, dato che tale percorso richiedeva minori prerequisiti e si adattava più facilmente a indirizzi e curricoli diversi.

Attività su problemi isoperimetrici e di area minima[6]

Questa è una sintesi delle relazioni dei docenti a cura di

Cristina Bonmassar, Liceo "Leonardo Da Vinci" Trento
Roberta Scarpa, Liceo "Antonio Rosmini" - Trento

Contesto

Docenti	**Scuola**	**Classi**	**Periodo**	**Orario**
Cristina Bonmassar	Liceo scientifico Da Vinci Trento	III A, doppia lingua, 23 studenti, classe debole dal punto di vista del profitto e turbolenta dal punto di vista del comportamento. Possiede una visione della matematica come materia rigida e noiosa	22 settembre 13 ottobre	curricolare
Fulvio Torresani	Istituto Istruzione superiore Russell	IV ITI, specializzazione informatica, 16 studenti tutti maschi	23 ottobre 30 ottobre	curricolare
Giancarlo Dorigotti	ITCG Fontana di Rovereto	III A, programmatori, 21 studenti, non molto impegnati nello studio, tranquilli. Profitto non omogeneo con studenti in particolare difficoltà	16 ottobre 13 novembre	curricolare
Giancarlo Dorigotti	ITCG Fontana di Rovereto	V A, programmatori, 9 studenti. Tranquilli ma non sempre impegnati, con qualche ripetente.	11 ottobre 13 novembre	curricolare
Maddalena Litterini	Liceo scientifico Galilei Trento	IV doppia lingua, 17 studenti	15 ottobre 15 gennaio	curricolare
Patrizia Franzoni	Liceo linguistico Rosmini Trento	III A, 17 studenti	26 settembre 3 ottobre	curricolare

6 Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 3.

Modalità di lavoro

Docenti	**Gruppi**	**Modalità utilizzo schede**	**Registrazione dell'attività da parte degli studenti**	**Eventuale compresenza di colleghi**
Cristina Bonmassar	3 gruppi da 5 alunni e 2 gruppi da 4, di formazione spontanea	B1 e B2: discussione fine domanda B3: discussione a fine scheda Revisione finale	Di gruppo	nessuna
Fulvio Torresani	4 gruppi da 3 studenti e 1 da 4, di formazione spontanea	Revisione finale dell'attività svolta	Individuale	Prof.ssa Mariangela Berti
Giancarlo Dorigotti III	5 gruppi da 4 studenti, formazione libera	Discussione alla fine di ogni domanda	Individuale	nessuna
Giancarlo Dorigotti V	3 gruppi da 3 studenti, formazione libera	Discussione alla fine di ogni domanda	Individuale	nessuna
Maddalena Litterini	5 gruppi	Discussione alla fine di ogni scheda	Individuale	nessuna
Patrizia Franzoni	5 gruppi, di formazione spontanea	Discussione alla fine di ogni domanda	Di gruppo	Prof.ssa Roberta Scarpa al primo incontro

Scheda B1 - Tempi

Cristina	3 lezioni e mezzo da 50 minuti	3 ore
Fulvio	1 lezione e mezzo da 50 minuti	70 minuti circa
Giancarlo classe terza	7 lezioni da 50 minuti	5 ore e 50 minuti
Giancarlo classe quinta	5 lezioni da 50 minuti	4 ore e 10 minuti
Maddalena	2 lezioni da 50 minuti	1 ora e 40 minuti
Patrizia	3 lezioni da 50 minuti	2 ore e 30 minuti

Risposte degli studenti

Cristina

d1: gli alunni hanno risposto come previsto sovrapponendo i rettangoli e confrontando ad occhio le parti sporgenti;

d2: risposta data facilmente, anche se il calcolo dell'equazione della retta è stato macchinoso senza uso del grafico (retta per 2 punti e non rapporto incrementale);

d3: solo un'alunna coglie che la domanda è in qualche modo la richiesta inversa rispetto alla d2;

d4: buona la risposta intuitiva, più difficoltosa la generalizzazione;

d5: solo l'intervento dell'insegnante ha portato a scrivere l'equazione dell'iperbole;

d6: solo 2 gruppi hanno dato la risposta in modo autonomo.

Dal punto di vista emotivo, la partecipazione degli studenti, mediamente,è stata soddisfacente.

Fulvio

Alcuni allievi sono perplessi e indecisi, ma diversi intuiscono la soluzione; anche se con gradi diversi di dettaglio e precisione; un po' più difficoltosa risulta la formalizzazione.

Partecipazione ed attenzione elevate

Giancarlo classe terza

Difficoltà da parte degli studenti, in sede di verifica orale, nel produrre enunciati linguistici minimamente corretti. *Non c'è stato grande entusiasmo*.

Giancarlo classe quinta

d1: tutti i gruppi rispondono velocemente;

d2:un paio di studenti hanno difficoltà, ma tutti producono il grafico;

d3: solo due gruppi su tre danno la risposta;

d4: solo un'alunna osserva subito che l'area è maggiore quanto più la differenza fra i lati è maggiore; qualcuno si accorge che può essere visto come un problema della ricerca del massimo di una funzione in due variabili;

d5: il disegno è stato fatto a casa e quasi tutti rispondono correttamente;

d6: gli studenti incontrano qualche difficoltà e l'insegnante interviene sottolineando la dualità rispetto alla questione precedente.

Difficoltà da parte degli studenti, in sede di verifica orale, *nel produrre enunciati linguistici minimamente corretti*.

Non ci sono stati grande entusiasmo, è mancata la revisione domestica degli argomenti svolti, carente l'impegno nel lavoro di gruppo; qualche studente con ottime capacità algebriche dichiara esplicitamente di non gradire l'attività.

Maddalena

d1: gli studenti non danno il giusto peso alla isoperimetria dei due rettangoli;

d4: gli studenti non hanno avuto nessun dubbio nel riconoscere il rettangolo di area maggiore.

Variazioni rispetto all'originale

Cristina

Richiesta di verifica della proprietà isoperimetrica dei due rettangoli di plexiglas

Rispetto alla parte Complementi sono stati svolti i problemi dei recinti

Giancarlo Classe terza

Richiesta di verifica della proprietà isoperimetrica dei due rettangoli di plexiglas senza utilizzare il righello.

Utilizzo di tabelle lati/area, lati/perimetro nel rettangolo e interpolazione dei dati su un grafico.

Utilizzo di un modello cartaceo di triangolo sottoposto a piegature.

Racconto della leggenda di Didone.

Rispetto alla parte Complementi sono stati svolti esperimenti con le bolle di sapone.

Cenni a problemi relativi alla costruzione di contenitori.

Giancarlo Classe quinta

Richiesta di verifica della proprietà isoperimetrica dei due rettangoli di plexiglas senza utilizzare il righello.

Interpretazione del problema isoperimetrico sul rettangolo con un problema della ricerca del massimo di una funzione in due variabili vincolate e successiva rappresentazione con le linee di livello con il software Derive (vedi Allegato 1)

Utilizzo di un modello cartaceo di triangolo sottoposto a piegature

Maddalena

Evidenziazione della proprietà isoperimetrica dei due rettangoli di plexiglas.

Proposta di esercizi per il lavoro domestico

Patrizia

Presentazione dei primi 4 quesiti della scheda B1, motivata dal fatto che l'esperienza necessitava più tempo del previsto, mancando le alunne dei prerequisiti richiesti.

L'insegnante si riserva di riprendere l'attività successivamente quando saranno stati acquisiti gli strumenti necessari.

Scheda B2 - Tempi

Cristina	2 lezioni da 50 minuti	1 ora e 40 minuti
Fulvio	1 lezione e mezzo da 50 minuti	70 minuti circa
Giancarlo classe terza	6 lezioni da 50 minuti	5 ore
Giancarlo classe quinta	7 lezioni da 50 minuti	5 ore e 50 minuti
Maddalena	2 lezioni da 50 minuti	1 ora e 40 minuti

Risposte degli studenti

Cristina

d1: gli alunni hanno avuto qualche difficoltà nel capire il possibile utilizzo dell'astine con i pioli e la cordicella;

d2: risposta non scontata a cui gli alunni sono giunti con la mediazione dell'insegnante;

d3: la risposta alla prima parte della domanda è stata immediata, ma la motivazione della seconda parte è stata fornita dall'insegnante;

d4: d5: scarso interesse dei ragazzi che non hanno né cercato né dato la risposta;

d6: risposta facile, curiosità verso lo strumento.

Gli studenti hanno trovato la scheda poco interessante e quindi non hanno partecipato attivamente.

Fulvio

d1: i ragazzi si dedicano in vari modi alla ricerca di altri triangoli isoperimetrici a quello dato. Un paio e specialmente uno scopre che le diverse posizioni del terzo vertice C devono appartenere ad una particolare ellisse. Diversi trovano di conseguenza che l'area massima si ha con l'altezza passante per l'origine (triangolo isoscele).

Impostazione della ricerca riguardante l'equazione dell'ellisse in due modi:

sfruttando la proprietà del luogo P(x,y) / PA + PB = 18.

Con la ricerca del semiasse minore. (Coincidente con l'altezza del triangolo isoscele).

d2, d3, d4, d5: un gruppo di circa sei studenti (37%) perviene velocemente alla conclusione che sia i triangoli sia i poligoni dovranno essere equilateri e ciò sfruttando i risultati di un'attività precedente. Non si arriva a trattare adeguatamente la necessità che i poligoni siano anche equiangoli.

d6: in seguito, con una congettura basata sull'aumento progressivo del numero di lati, si arriva alla conclusione seguente: fra tutte le figure piane di perimetro fissato, quella di area maggiore è il cerchio. Tutti gli studenti, in tempi poco diversi, fanno proprie queste constatazioni.

Giancarlo classe terza

d1: qualcuno disegna triangoli in posti diversi. La risposta alla seconda parte della domanda avviene mediante grafici con la differenza fra i lati e l'area.

d2: gli studenti non sanno il significato dei termini isoscele e equilatero.

d3: anche in questo caso gli studenti fanno grafici con la differenza fra i lati e il perimetro. La dimostrazione di Erone viene presentata alla lavagna dall'insegnante.

d4. qualcuno si rende conto della simmetria (dualità) fra il problema dell'area massima e quello del perimetro minimo.

d6: l'insegnante racconta la leggenda di Didone e si prova ad usare un recinto di carta stropicciata e delle biglie di vetro. Si estende al caso tridimensionale con le bolle di sapone e cenni a problemi relativi alla costruzione di contenitori.

Giancarlo classe quinta

d1: appena gli studenti vedono la strumentazione riconoscono subito il metodo del giardiniere e dichiarano di disegnare un'ellisse. Tutti provano a collocare i pioli dell'apparato sui fuochi (cosa difficile da fare perché il punto viene nascosto dalla base del piolo), ma nessuno ha l'idea di disegnare una crocetta abbastanza grande per vedere la posizione esatta del piolo! L'insegnante chiede di disegnare e misurare i lati di almeno cinque triangoli di base AB e vertice sull'ellisse. Per trovare quello con area massima tutti i gruppi preparano una tabellina con misure dei lati, perimetro e area. Si osserva che per errori sia nel disegno dell'ellisse che nella misura non sempre il perimetro è costante! Per casa gli studenti devono trovare l'equazione dell'ellisse e verificare se i punti trovati vi appartengono.

d2: viene affidata come compito domestico e poi richiamata nelle lezioni successive; gli studenti vengono sollecitati a riflettere sul perché prima si è lavorato con i rettangoli e poi con i triangoli.

d5: discussione in classe. Si estende al caso tridimensionale con le bolle di sapone, uso software in laboratorio informatico; esempi del mondo reale.

d3: La dimostrazione di Erone viene presentata alla lavagna dall'insegnante.

Maddalena

Interessante come, pur non avendo lo strumento per tracciare l'ellisse, gli studenti, dopo aver trovato "a mano" alcuni punti, abbiano ricordato il luogo geometrico.

Variazioni rispetto all'originale

Cristina

La risposta alla domanda d1 è stata solo intuitiva, non conoscendo i ragazzi l'equazione dell'ellisse.

Fulvio

Non è stata eseguita la dimostrazione del teorema di Erone.

Rispetto alla parte Complementi sono stati svolti esperimenti con le bolle di sapone.

In particolare si spiega la formazione delle lamine d'acqua saponata aderenti all'anello metallico e al cappio di spago e si passa a considerazioni sulla configurazione d'equilibrio delle lamine.

Giancarlo Classe terza

Utilizzo di tabelle lati/area, lati/perimetro nel triangolo e interpolazione dei dati su un grafico

Racconto della leggenda di Didone.

Si anticipa alla fine della scheda B2 l'estensione al caso tridimensionale con le bolle di sapone e cenni a problemi relativi alla costruzione di contenitori

Giancarlo Classe quinta

Utilizzo di tabelle lati/area, lati/perimetro nel triangolo e interpolazione dei dati su un grafico.

Si anticipa alla fine della scheda B2 l'estensione al caso tridimensionale con le bolle di sapone e uso di software in laboratorio informatico; esempi del mondo reale.

La domanda d3 viene affrontata alla fine della scheda.

Maddalena

Proposta di esercizi per il lavoro domestico[7]

Scheda B3 - Tempi

Cristina	3 lezioni da 50 minuti	2 ore e 30 minuti
Fulvio	1 lezione e mezzo da 50 minuti	70 minuti circa
Giancarlo classe terza	3 lezioni da 50 minuti	2 ore e 30 minuti
Giancarlo classe quinta	4 lezioni da 50 minuti	3 ore e 20 minuti
Maddalena	2 lezioni da 50 minuti	1 ora e 40 minuti
Patrizia	3 lezioni da 50 minuti	2 ore e 30 minuti

Risposte degli studenti

Cristina

d1: gli studenti hanno avuto difficoltà per due motivi: non sapevano bene come usare un calibro, in particolare da dove bisognava partire per effettuare la misura richiesta (a nessuno è venuto in mente di usare il righello per avere una misura approssimativa e quindi poi risolvere il loro problema); sembravano non sapere assolutamente le formule per il calcolo dell'area e del volume del cilindro e non hanno neppure provato a ricavarle.

Sembra che gli alunni non abbiano letto con attenzione fino in fondo il testo del quesito: infatti almeno due gruppi hanno fatto il conto di area e volume senza lasciare indicato il valore di π, come veniva peraltro richiesto.

d2. tutti gli alunni hanno incontrato tantissime difficoltà: alla classe mancava il concetto di funzione e quindi la sola scrittura $A(r)$ è bastata per mandarli in crisi. È stato quindi necessario rispondere al quesito alla lavagna sotto la guida dell'insegnante.

d3: attraverso la discussione collettiva è passata facilmente l'idea che la funzione $A(r)$ non ha massimo; per quanto riguarda il minimo, è stato fatto il calcolo dei valori della funzione con Excel e i ragazzi si sono convinti facilmente che il minimo si ha proprio per $r = 2$. È stata anche rappresentata la funzione con Derive.

d4, d5, d6. tutti hanno indicato la sfera, anche se non sono riusciti a darne una spiegazione. Solo un ragazza ha detto che se nel piano la stessa situazione era tipica del cerchio, nello spazio analogamente si tratterà della sfera.

Fulvio

d1: si discutono le misure con l'evidente constatazione che i volumi non variano, entro gli errori sperimentali, mentre le aree sì e che esiste un'area minima: quella del cilindro giallo.

d2: con la guida dell'insegnante si ricava l'area A(r) di un cilindro di volume 16π in funzione del raggio: A(r) = 2πr2 + 32π/r.

---

7 Vedi Appendice 2

d3: si analizza la forma di A(r) = $2\pi r2 + 32\pi/r$ costituita da due addendi, ciascuno dei quali preso singolarmente forma l'equazione di una conica, il primo una parabola e il secondo un'iperbole equilatera riferita ai propri asintoti.

La partecipazione e la comprensione degli studenti sono buone. Nascono spontaneamente alcune domande, in particolare come formare il grafico somma dei due considerati. Si conclude con l'invito agli studenti a ricostruire in orario extrascolastico il grafico di A(r) per punti usando la calcolatrice e durante la lezione successiva si traccia il grafico e si eseguono calcoli in un intorno di 2, constatando che $A(2)<A(r)$ per ogni r testato. Il grafico è ottenuto in due modi:
- come somma di due coniche
- effettuando considerazioni sintetiche sui valori per r piccolo, r grande e r intermedio.

Giancarlo classe terza

d1: difficoltà nell'uso del calibro, confusione nella letture delle misure rilevate e intervento dell'insegnante per ricostruire le formule di area e volume del cilindro.

Giancarlo classe quinta

d1: difficoltà nell'uso del calibro, ma riescono a ricostruire abbastanza facilmente le formule relative a volume e superficie esterna del cilindro.

Maddalena

d1: la conoscenza dell'uso del calibro ha facilitato gli studenti nelle misurazioni.

Variazioni rispetto all'originale

Cristina

È stata effettuata la digressione riguardante il Kg campione.

Fulvio

Utilizzo del software Derive e del foglio elettronico per il tracciamento del grafico della funzione A(r).

Rispetto alla parte Complementi sono stati svolti esperimenti con le bolle di sapone.

È stata effettuata la digressione riguardante il Kg campione.

Giancarlo Classe terza

Per rispondere alla domanda **d3** è stato utilizzata una tabella Excel parametrizzata.

Giancarlo Classe quinta

Rispetto alla parte Complementi sono stati svolti esperimenti con le bolle di sapone.

Richiami ad esempi del mondo reale.

Uso di una tabella Excel per i cilindri

Si suggerisce senza provarlo di pesare i cilindri.

Maddalena

Ogni gruppo ha fatto la misura solamente di 2 cilindri e poi sono state condivise le misure.

Rispetto alla parte Complementi sono stati svolti esperimenti con le bolle di sapone.

Verifiche - Verifica Cristina

<table>
<tr><td>Tempi</td><td>50 minuti</td></tr>
<tr><td>Tipologia</td><td>6 quesiti a risposta aperta che richiedono sia una parte operativa che una parte di descrizione e motivazione di quanto affrontato in classe</td></tr>
<tr><td>Obiettivi</td><td>Descrivere quanto fatto in classe usando linguaggio e formalismo appropriati
Affrontare situazioni analoghe a quelle proposte a lezione
Applicare quanto imparato ad un problema del mondo reale</td></tr>
<tr><td>Esiti</td><td>Il livello di sufficienza è determinato dal raggiungimento dei due primi obiettivi

In generale, assegnando 1 punto per gli esercizi 1), 2), 3), 4) e 1,5 punti per gli esercizi 5), 6) e partendo da una votazione minima di 3, i risultati conseguiti sono i seguenti:
<table><tr><th>voto</th><th>frequenza</th></tr><tr><td>3,5</td><td>2</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td></tr><tr><td>4,5</td><td>2</td></tr><tr><td>5</td><td>5</td></tr><tr><td>5,5</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td></tr><tr><td>6,5</td><td>2</td></tr><tr><td>7,5</td><td>1</td></tr><tr><td>9</td><td>1</td></tr></table>
Media: 5,2

Insufficienze: 67%</td></tr>
</table>

1) Considera la famiglia dei rettangoli di perimetro pari a 48. Supponiamo di rappresentare i rettangoli nel piano cartesiano facendo in modo che un vertice coincida con l'origine e che i rettangoli abbiano due lati rispettivamente sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. A quale curva appartiene il vertice opposto all'origine? Scrivi l'equazione di tale curva e motiva la tua risposta.

I miei alunni hanno già affrontato l'anno scorso la retta e quindi sono in grado di rispondere a questa domanda; nel caso in cui gli studenti non conoscono ancora l'equazione della retta, basta chiedergli di motivare la risposta.

2) Nel piano cartesiano considera i rettangoli che hanno le seguenti caratteristiche

a. un vertice nell'origine

b. due lati rispettivamente sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate

c. il quarto vertice appartiene alla curva di equazione $xy = 64$.

Indica una proprietà dei rettangoli che dipende dalla caratteristica **c)**

Motiva la tua risposta.

È una domanda dello stesso taglio della precedente, ma mi sembra facile rispondere se solo siè prestato attenzione all'attività in classe

3) Considera l'insieme dei rettangoli di area ***A (*** ricorda che con A indichiamo un numero positivo qualsiasi). Dimostra che il rettangolo di perimetro minimo è il quadrato di lato $\sqrt{A}$.

Aiuto: se ti sembra complicato lavorare con il valore A, sostituisci ad esso un numero a tua scelta.

Questo esercizio potrebbe risultare troppo difficile, in quanto si tratta di generalizzare i calcoli fatti a scuola con i numeri. Vorrei vedere se riescono ad astrarre

4) Spiega come abbiamo descritto tutti i triangoli di base fissata $AB = 12$ e perimetro 30. Fra tutti i triangoli ottenuti, qual è quello di area maggiore? Motiva la tua risposta.

Questa domanda richiede la descrizione di come abbiamo proceduto a scuola nel caso considerato. Se l'alunno ha prestato attenzione durante il lavoro fatto in classe, non dovrebbe avere problemi a rispondere

5) In una zona pianeggiante si vuole costruire un parco giochi, all'interno si vuole costruire una zona riservata ai bambini più piccoli. Si ha a disposizione una recinzione lunga 1500 metri. Quale forma e dimensioni dovrà avere la zona riservata ai più piccoli se si vuole racchiudere la superficie più ampia possibile?

Gli studenti devono riconoscere che la circonferenza è la forma ottimale e poi devono calcolarne il raggio

6) La ditta produttrice della bevanda "Bolleblù" vuole lanciare sul mercato un formato di lattina cilindrica contenente 380ml di prodotto. Che dimensioni deve avere il cilindro affinché si utilizzi per la sua fabbricazione la minor quantità di materiale?

Lo scopo delle esercizio è far riconoscere agli alunni che questa situazione non è altro che la ricerca del cilindro di area minima fra tutti quelli di volume fissato, così come fatto in classe. Mi potrei anche accontentare del fatto che mi dicano che il diametro deve essere uguale all'altezza, senza fare il calcolo numerico delle dimensioni.

Verifica Fulvio

<table>
<tr><td>Tempi</td><td>50 minuti</td></tr>
<tr><td>Tipologia</td><td>7 quesiti a risposta aperta che richiedono sia una parte operativa che una parte di descrizione e motivazione di quanto affrontato in classe</td></tr>
<tr><td>Obiettivi</td><td>Descrivere quanto fatto in classe usando linguaggio e formalismo appropriati
Affrontare situazioni analoghe a quelle proposte a lezione
Applicare quanto imparato ad un problema del mondo reale</td></tr>
<tr><td>Osservazioni</td><td>Può apparire che le domande siano troppo simili a quanto si è svolto durante l'attività, ma a mio parere è importante che la prova di laboratorio abbia un taglio più vicino alla realtà sperimentale svolta, rispetto alle prove "tradizionali" e che ciò sia poi accompagnato da domande attinenti all'interpretazione più generale e tipicamente "matematica" di quanto si è sperimentato, altrimenti si riproducono temi troppo simili a quelli tradizionali con una valutazione solo indiretta dell'attività laboratoriale. Non faccio tuttavia mancare una valutazione sulla comprensione dell'analisi e dello sviluppo più prettamente matematici e generalizzanti relativi alla parte sperimentale</td></tr>
<tr><td>Esiti</td><td>Per il punteggio associato ad ogni esercizio si veda il testo allegato
<table>
<tr><td>voto</td><td>frequenza</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>3</td></tr>
<tr><td>8</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>1</td></tr>
</table>
Media: 7
Insufficienze: 7%</td></tr>
</table>

Fulvio Torresani Prova isoperimetrica Pilati Cles

PROVA SULL'ATTIVITÀ

LA PRATICA DEL LABORATORIO DI MATEMATICA

CLASSE IVA ITI B INFORMATICA ISTITUTO PILATI CLES

1A) Spiega come hai fatto a capire, sperimentando con i modelli di rettangoli rossi e blu di uguale perimetro, quale fosse quello di area maggiore.

[punti 4]

1B) Trattando matematicamente la situazione che hai sperimentato con i modelli dei rettangoli isoperimetrici di perimetro = 28, deduci con un metodo a scelta fra i tre sviluppati in classe, che il rettangolo di area massima è il quadrato.

[punti 8]

2A) Descrivi la situazione sperimentale dei triangoli aventi perimetro uguale a 30 e base 12. In particolare spiega prima quali altri triangoli aventi la stessa base e perimetro uguale a 30 si trovano facilmente.

[punti 4]

2B) Spiega come si possano individuare tutti i triangoli con le caratteristiche dei precedenti (quelli esaminati nell'esercizio 2A) e come si possa poi capire facilmente quali siano quelli aventi l'area massima.

[punti 8]

3A) Spiega come abbiamo ricostruito le formule utilizzate per l'area totale e il volume dei cilindri e descrivi le misure effettuate sul cilindro assegnato al tuo gruppo.

[punti 6]

Nell'intento di dedurre matematicamente e di generalizzare i risultati ottenuti nell'attività attività di laboratorio menzionata nell'esercizio 3A abbiamo:

1. ricavato l'area A(r) in funzione del raggio;
2. costruito in vari modi il grafico di A(r).

A tal proposito ricava anche tu:

3B) l'area di un cilindro di volume 16π in funzione del raggio di base;

[punti 6]

4B) il grafico di A(r), spiegando come lo si ottiene senza eseguire i calcoli (al massimo qualche valore campione) e soprattutto cosa risulta dal grafico a proposito dell'area minima. Puoi utilizzare uno o più dei diversi modi con i quali abbiamo ottenuto il grafico.

[punti 6]

Verifica Giancarlo - classe terza

<table>
<tr><td>Tempi</td><td>50 minuti</td></tr>
<tr><td>Tipologia</td><td>4 quesiti a risposta aperta</td></tr>
<tr><td>Obiettivi</td><td>Affrontare situazioni analoghe a quelle proposte in classe</td></tr>
<tr><td>Esiti</td><td>Distribuzione dei voti
<table>
<tr><td>voto</td><td>frequenza</td></tr>
<tr><td>3,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5-</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5.5</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6,5</td><td>5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8+</td><td>3</td></tr>
<tr><td>9-</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td></tr>
</table>
Media: 6,6
Insufficienze: 38%</td></tr>
</table>

1. Considera la famiglia dei rettangoli di perimetro pari a 48 quadretti. Rappresentiamo i rettangoli nel piano cartesiano facendo in modo che un vertice coincida con l'origine, un vertice appartenga al semiasse positivo delle ascisse e un vertice appartenga al semiasse positivo delle ordinate.
   Disegna il grafico descritto dal vertice opposto all'origine di tali rettangoli e ricava la sua equazione.
   Fra tutti i rettangoli ottenuti, qual è quello di area maggiore?
   Motiva le tue risposte.
2. Considera la famiglia dei rettangoli con un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. Quale proprietà hanno i rettangoli i cui vertici opposti all'origine appartengono alla curva di equazione $xy = 64$ quadretti?
   Fra tutti i rettangoli ottenuti, qual è quello di perimetro minore?
   Motiva le tue risposte.
3. Considera l'insieme dei triangoli di base $AB = 12$ quadretti e perimetro 30 quadretti. Quale grafico è descritto dal terzo vertice del triangolo?
   Fra tutti i triangoli ottenuti, qual è quello di area maggiore?
   Motiva le tue risposte.
4. Considera l'insieme dei triangoli di base $AB = 12$ e area 30 quadretti. Quale grafico è descritto dal terzo vertice del triangolo?
   Fra tutti i triangoli ottenuti, qual è quello di perimetro minore?
   Motiva le tue risposte.

Verifica Giancarlo - classe quinta

<table>
<tr><td>Tempi</td><td>50 minuti</td></tr>
<tr><td>Tipologia</td><td>4 quesiti a risposta aperta</td></tr>
<tr><td>Obiettivi</td><td>Affrontare situazioni analoghe a quelle proposte in classe</td></tr>
<tr><td>Esiti</td><td>Distribuzione dei voti
<table>
<tr><td>voto</td><td>frequenza</td></tr>
<tr><td>4+</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5-</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6-</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>7,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td></tr>
</table>
Media: 6,1
Insufficienze: 50%</td></tr>
</table>

1. Considera la famiglia dei rettangoli di perimetro pari a 48 quadretti. Rappresentiamo i rettangoli nel piano cartesiano facendo in modo che un vertice coincida con l'origine, un vertice appartenga al semiasse positivo delle ascisse e un vertice appartenga al semiasse positivo delle ordinate.
   Disegna il grafico descritto dal vertice opposto all'origine di tali rettangoli e ricava la sua equazione.
   Fra tutti i rettangoli ottenuti, qual è quello di area maggiore?
   Motiva le tue risposte.
2. Considera la famiglia dei rettangoli con un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. Quale proprietà hanno i rettangoli i cui vertici opposti all'origine appartengono alla curva di equazione $xy = 64$ quadretti?
   Fra tutti i rettangoli ottenuti, qual è quello di perimetro minore?
   Motiva le tue risposte.
3. Considera l'insieme dei triangoli di base $AB = 12$ quadretti e perimetro 30 quadretti. Quale grafico è descritto dal terzo vertice del triangolo?
   Fra tutti i triangoli ottenuti, qual è quello di area maggiore?
   Motiva le tue risposte.
4. Considera l'insieme dei triangoli di base $AB = 12$ e area 30 quadretti. Quale grafico è descritto dal terzo vertice del triangolo?
   Fra tutti i triangoli ottenuti, qual è quello di perimetro minore?
   Motiva le tue risposte.

Verifica Maddalena

<table>
<tr><td>Tempi</td><td>50 minuti</td></tr>
<tr><td>Tipologia</td><td>4 quesiti a risposta aperta</td></tr>
<tr><td>Obiettivi</td><td>Saper affrontare situazioni analoghe a quelle proposte in classe
Saper utilizzare linguaggio e strumenti appropriati</td></tr>
<tr><td>Esiti</td><td>Per il punteggio associato ad ogni esercizio si veda il testo allegato.
<table>
<tr><td>voto</td><td>frequenza</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>6</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>2</td></tr>
<tr><td>8</td><td>1</td></tr>
<tr><td>9</td><td>1</td></tr>
<tr><td>10</td><td>2</td></tr>
</table>
Media=6,5
Insufficienze=35,7%</td></tr>
<tr><td>Allegati</td><td>Testo della verifica
Analisi dettagliata dei risultati della verifica</td></tr>
</table>

VERIFICA PROBLEMI ISOPERIMETRICI

Classe IV G

1. Considera due numeri positivi la cui la somma dia 60. Trovare quelli che determinano il prodotto massimo?
2. Una piscina ha forma di un rettangolo unito a due semicerchi. Determina quella di superficie massima.

3. Tra tutti i cilindri che puoi inscrivere in una sfera di raggio 4 trova quello di volume massimo.
4. Ad una ditta produttrice di scatole in tetrapak viene chiesto di fabbricare il parallelepipedo a base quadrata che possa contenere un litro di bevanda e che abbia superficie minima. Trova il parallelepipedo richiesto.

Nota: risolvi gli esercizi dove possibile per via elementare.

Analisi dei risultati

Questa verifica, effettuata a sorpresa, è stata valutata, ma il voto assegnato ad ogni studente non è stato utilizzato per determinare la media di fine quadrimestre.

Gli studenti, quindi, non hanno avuto modo di prepararsi in vista della prova e visti i risultati più che sufficienti sono soddisfatta di come gli alunni hanno dimostrato di aver raggiunto gli obiettivi che mi ero prefissata.

ESERCIZIO 1

Questo esercizio viene affrontato e risolto correttamente da 13 studenti su 14.

Tra questi solo una studentessa lo risolve per tentativi, gli altri risolvono il problema con l'uso delle derivate.

ESERCIZIO 2

Tra gli studenti che hanno cercato di intuire la soluzione per via elementare due hanno fissato la loro attenzione sul rettangolo e non sulla presenza contemporanea dei semicerchi proponendo come soluzione un quadrato centrale e due semicerchi.

Un errore che si è ripetuto due volte è stato di considerare come perimetro anche la parte interna della piscina.

ESERCIZIO 3

Tra quelli che hanno risolto correttamente l'esercizio solo uno studente lo fa per via elementare. Due studenti hanno sbagliato perché hanno calcolato il raggio della sfera come quello del cilindro.

ESERCIZIO 4

Tutti gli studenti risolvono l'esercizio ricorrendo all'uso delle derivate.

Buoni i risultati.

Verifica Patrizia

<table>
<tr><td>Tempi</td><td>50 minuti</td></tr>
<tr><td>Tipologia</td><td>5 quesiti a risposta aperta</td></tr>
<tr><td>Obiettivi</td><td>Affrontare situazioni analoghe a quelle proposte in classe</td></tr>
<tr><td>Esiti</td><td>Per il punteggio associato ad ogni esercizio si veda il testo allegato
<table>
<tr><td>voto</td><td>frequenza</td></tr>
<tr><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5,5</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td></tr>
<tr><td>6,5</td><td>3</td></tr>
<tr><td>7</td><td>1</td></tr>
<tr><td>8,5</td><td>2</td></tr>
</table>
Media: 6,1
Insufficienze: 29%</td></tr>
</table>

CLASSE 4lC 17 ottobre 2007

TEMA DI MATEMATICA

1) Considera la famiglia dei rettangoli di perimetro pari a 48 cm. Supponiamo di rappresentare i rettangoli nel piano cartesiano facendo in modo che un vertice coincida con l'origine, un vertice appartenga al semiasse positivo delle ascisse e un vertice appartenga al semiasse positivo delle ordinate. A quale curva appartiene il vertice opposto all'origine dei rettangoli della famiglia considerata? Scrivi l'equazione di tale curva e motiva la tua risposta.

2) Considera l'insieme dei rettangoli di perimetro P fissato (dove P è un numero reale positivo). Qual è il numero di elementi di tale insieme? Motiva opportunamente la tua risposta.

3) Considera la famiglia dei rettangoli di perimetro pari a 40 cm. Determina il rettangolo di area massima, dimostrando opportunamente le tue affermazioni.

4) Considera l'insieme dei rettangoli che hanno un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate. Quale proprietà hanno i rettangoli i cui vertici opposti all'origine appartengono alla curva di equazione ? Motiva la tua risposta.

5) Considera l'insieme dei rettangoli di area fissata pari a 64. Dimostra che il rettangolo di perimetro minimo è il quadrato di lato 8.

Osservazioni

Cristina

Mi aspettavo di trovare negli alunni maggior entusiasmo per l'attività, come occasione per mettere finalmente le mani" sulla matematica e provare di persona cosa succede in determinate situazione: invece spesso mi sembrava che mi guardassero come un'aliena, una che non sa cosa sia la "vera matematica" (formule, calcoli e una tonnellata di esercizi ripetitivi, ma rassicuranti).
Spesso ho sentito dire : "Ma è difficile!", anche come alibi per non provare neppure a cimentarsi con il problema che avevano di fronte.

> *Il fatto stesso di non avere compiti a casa (se non il resoconto sull'attività in classe, che è risultato superficiale e spesso incompleto) ha indotto gli alunni a pensare che non si trattava di un'attività seria. Forse sarebbe opportuno studiare una serie di attività da proporre mano a mano come compiti, anche per monitorare costantemente la comprensione dei contenuti proposti e per facilitarne l'assimilazione.*

Dal mio punto di vista l'attività è stata positiva: mi ha permesso di recuperare il carattere strumentale di tanti oggetti matematici studiati (o che avrebbero dovuto studiare!) nel biennio (equazioni, sistemi, radicali, funzioni, rette) e di dare loro un "assaggio" del mio metodo di lavoro.
L'ultima parola spetta alla verifica: non appena svolta e corretta, vi comunicherò i risultati quesito per quesito.

Un'ultima cosa mi preme sottolineare come riflessione che propongo a tutti: gli alunni non hanno mostrato tutto quell'entusiasmo che invece mi sarei aspettata.

- Avevo pretese troppo alte?
- forse il mio modo di proporre l'attività non è stato sufficientemente coinvolgente?
- Forse non era la classe giusta? (ammesso che un classe giusta esista …)
- Forse l'inizio anno in un classe che non conoscevo non era il momento giusto?
- Forse la difficoltà dell'approccio da parte dei ragazzi ha superato la curiosità e la bellezza di poter mettere le mani sulla matematica?
- Forse insistendo alla fine vincerò?

Fulvio

Ho dedicato un incontro finale ad un'analisi globale di quanto fatto in precedenza, effettuando una sintesi dei vari argomenti trattati, cercando di evidenziare il filo conduttore di tutta l'attività, i vari nessi logici e soprattutto cercando di far emergere che i vari risultati presentano uno sviluppo logico coerente riconducibile ad un'unitarietà di fondo (principalmente che la figura ottimale è la più regolare possibile, compatibilmente con i vincoli dati, fino ad arrivare al cerchio o alla sfera se non ci sono condizioni sul numero di lati o di altro tipo).
Con la guida e lo stimolo dell'insegnante si effettua anche una discussione con l'intero gruppo classe sui punti salienti delle esperienze compiute e sulle successive analisi più strettamente logico-matematiche su di esse eseguite.
In tale modo credo di esser riuscito a richiamare e consolidare le idee di base ed il quadro concettuale sottostante al percorso.

Giancarlo Classe terza

Ho impiegato molto tempo anche per richiamare e precisare una serie di concetti: dall'equazione della retta, alla differenza fra verifica e dimostrazione, che comunque è necessario richiamare alla fine della terza.

Penso richiamerò alcuni degli esempi più significativi anche quando affronterò in maniera più approfondita le coniche e quindi ritengo di aver avviato un lavoro che potrò utilizzare anche in altre fasi del percorso.

Ho dato compiti a casa ed ho fatto verifiche orali ed una verifica scritta (tutto con voto), però ho dovuto insistere molto per ottenere degli enunciati linguistici minimamente decenti e in qualche caso (in particolare all'inizio) ho dettato qualcosa (cercando di evitare il più possibile).

Non c'è stato un grande entusiasmo: almeno un ripetente ha sviluppato un interesse notevole confermando buoni risultati anche nelle prove successive. Gli studenti migliori (e la competenza linguistica e argomentativa mi è sembrata prevalere di gran lunga su altri aspetti) hanno ottenuto anche successivamente risultati positivi, mentre chi era più in difficoltà (si veda il report sulla prova scritta) non ha fatto grandi progressi (con un'eccezione nell'ultimo tema).

Giancarlo Classe quinta

Ho impiegato molto tempo anche per richiamare e utilizzare concetti relativi allo studio di funzioni in 2 variabili vincolare, trattate immediatamente prima.

Penso richiamerò alcuni degli esempi più significativi anche quando affronterò problemi analoghi e quindi ritengo di aver avviato un lavoro che potrò utilizzare anche in altre fasi del percorso.

Ho dato compiti a casa ed ho fatto verifiche orali ed una verifica scritta (tutto con voto), però ho dovuto insistere molto per ottenere degli enunciati linguistici minimamente decenti. Ho spesso dovuto intervenire per ottenere un maggior impegno nel lavoro di gruppo che si tendeva a protrarre inutilmente.

Non c'è stato un grande entusiasmo e molti studenti non avevano minimamente rivisto gli argomenti svolti (cosa evidenziata dalla prova scritta).

Qualche studente anche con ottime capacità algebriche ha dichiarato esplicitamente di non gradire.
Molti degli studenti con prova scritta negativa hanno poi recuperato nel terzo tema conseguendo risultati positivi.

Maddalena

La mia idea è stata quella di non concentrare il lavoro, ma di far diventare questa attività un qualcosa che entrasse pian pianino, quasi come un momento di relax, ma anche un'occasione per discutere e per ripetere sotto un'altra veste, il programma già svolto nell'anno precedente.

Patrizia

Ecco schematicamente quanto è emerso:

- Divertimento;
- Apprezzamento della possibilità di scambio di idee con gli altri membri del gruppo;
- Apprezzamento dell'utilizzo di strumenti matematici acquisiti in precedenza in un contesto non usuale;
- Difficoltà nel riconoscimento e nell'applicazione dei concetti coinvolti;
- Un alunna ha lamentato difficoltà nei momenti comuni (maggiore dispersività);
- Difficoltà di individuazione degli obiettivi. (a che cosa serve?, quali conoscenze ho raggiunto?)
- Apprezzamento della modalità laboratoriale che permette agli studenti di giungere autonomamente al risultato. "Gioia" della scoperta.
- Richiesta di argomenti maggiormente coinvolgenti (più legati ad esperienze reali).
- Richiesta di un momento, all'interno di ciascuna lezione, di formalizzazione da parte dell'insegnante di quanto intuito nei gruppi, anche in vista della redazione della relazione.
- Una alunna ha affermato di apprezzare particolarmente questo metodo di lavoro in cui "la matematica si mescola", riferendosi al fatto di utilizzare strumenti diversi in un unico contesto.
- Utilità del lavoro di gruppo per la comprensione dei concetti insieme ai propri compagni: "a volte capisco meglio le cose se sono spiegate da un compagno" (Ho di che meditare …).
- Difficoltà nell'individuazione di un percorso sequenziale dello svolgimento del laboratorio.

Attività sulla riflessione[8]

Riflessione al Rosmini di Trento

a cura di **Roberta Scarpa**, Liceo “Antonio Rosmini” - Trento

Contesto

L’attività è rivolta ad un gruppo di alunni delle classi prime, seconde e terze dell’istituto “Antonio Rosmini” di Trento. L’iscrizione all’attività è su base volontaria e per le sole classi terze può dare luogo ad un credito.

Siamo coinvolti in 8 insegnanti di cui 2 partecipanti al progetto pilota e 5 iscritti al corso di aggiornamento collegato.

Gli alunni iscritti sono 25 di cui 2 per la prima ad indirizzo pedagogico, 4 per la prima ad indirizzo linguistico, 8 per la prima ad indirizzo sociale, 4 per la seconda ad indirizzo sociale e 7 per la terza ad indirizzo linguistico. Tutti i gruppi indicati sono, casualmente, appartenenti alla stessa classe.

Le lezioni si svolgono i quattro giovedì pomeriggio del 7 febbraio, 14 febbraio, 21 febbraio e 28 febbraio 2008 dalle 14.10 alle 16.10.

L’attività è stata programmata fin dal mese di novembre con degli incontri della durata totale di circa 2 ore ciascuno.

Ogni pomeriggio è preceduto da una riunione di circa 1 ora dove tutti gli insegnanti partecipanti si confrontano e apportano eventuali modifiche al percorso pianificato alla luce degli eventi.

Motivazione degli insegnanti

Nel nostro istituto spesso si coglie l’insuccesso nello studio della disciplina che è prodotto frequentemente da una scarsa motivazione. Questa proposta è rivolta agli studenti che desiderano cogliere nella matematica aspetti operativi con i seguenti obiettivi:

- avvicinare gli studenti a temi importanti della matematica, proponendo problemi ambientati in un contesto laboratoriale;
- sollecitare la capacità d’intuizione, le abilità di calcolo e di formalizzazione già acquisite, lavorando quindi sulle loro conoscenze pregresse;

offrire l’opportunità di sperimentare il processo di costruzione di un modello matematico idoneo a descrivere il fenomeno osservato (dalla sperimentazione e analisi dei dati raccolti, alla sintesi e verifica dei risultati).

Modalità di lavoro

La modalità di lavoro è la suddivisione in gruppi che per lo più rispettano il gruppo classe, salvo per la terza che si divide in due gruppi.

I ragazzi sono nel laboratorio di fisica, mentre i materiali sono appoggiati su un tavolo di un laboratorio adiacente, in modo tale che le congetture dei gruppi non siano influenzate dalle verifiche di altri.

---

[8] Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 4

Scheda C1 - Tempi

2 lezioni da 120 minuti
4 ore

Risposte degli studenti

d1: alcuni pensano che il primo rimbalzo colpirà il birillo perché le traiettorie potranno formare solo triangoli isosceli, altri invece pensano che la traiettoria non potrà di certo essere rettilinea perché il bordo curvilineo produce una traiettoria curvilinea … altri pensano che essendo il bordo "ovale" si finisce sempre nel birillo da qualunque parte avvenga il rimbalzo;

d2: per tutti i gruppi è chiaro già da subito che c'è una simmetria rispetto all'asse maggiore dell'ellisse e quindi le traiettorie saranno uguali colpendo il bordo in punti simmetrici rispetto all'asse maggiore (sopra o sotto); qualcuno nota che piazza San Pietro è ovale e se uno si mette in un fuoco le colonne sono tutte allineate e questo c'entra sicuramente con il nostro biliardino; già da subito qualcuno parla di fuochi;

d3: qualche gruppo sostiene che in qualsiasi punto lancio la pallina elimino il birillo perché siamo davanti ad un'ellisse; un gruppo misura attentamente le traiettorie, sia sulla carta che sul biliardino e stabilisce che "la somma dei due percorsi che fa la pallina è sempre 5 cm sulla carta e 38 cm sul biliardino". Dopo si scoprirà che 38 cm è la misura dell'asse maggiore dell'ellisse. Qualcuno incomincia a spostare pallina e birillo, però verifica che non è possibile abbattere il birillo ad ogni tiro come prima, allora prova a spostarli simmetricamente, ma, con stupore, nota che anche ora non è più possibile abbattere il birillo sempre, come prima di spostarli. Si pensa di condividere le osservazioni con i tutti i gruppi radunati davanti al biliardino. Si nota che tutti capiscono bene il concetto: se misuro la traiettoria della pallina, essa ha lunghezza costante, anche con posizioni diverse. Si vengono a formare dei triangoli, sempre con la somma dei 2 lati uguali. A questo punto introduciamo il filo, che rappresenta la traiettoria della pallina. Non è elastico, è fissato in due punti e, se lo teniamo teso, riusciamo a fare il contorno del biliardino, riusciamo a disegnare un'ellisse...

Le ragazze decidono di disegnare un'ellisse sul foglio usando un cordoncino. Si devono fare varie prove perché non è banale. Diminuendo la distanza tra i punti si ottengono ellissi che si avvicinano sempre di più ad un cerchio. Qualcuno cerca di dare una formulazione con linguaggio formale alla definizione di ellisse e all'inizio ne nasce una vera confusione, però il concetto è chiaro, e alla fine viene formalizzato.

d4: tutti pensano che uno specchio, essendo piano, deve riflettere perpendicolarmente; quasi nessuno intuisce o ricorda la legge di riflessione. Solo un gruppo di ragazze di terza riesce a prevedere sulla carta la traiettoria poi confermata dal laser.

Dopo l'esperienza si osserva che

- nessuno conosce la legge di riflessione
- davanti ai raggi verdi, si nota spesso un triangolo isoscele che si apre sempre di più allontanando il birillo dal laser
- è ragionevole che detto triangolo isoscele formi degli angoli uguali con lo specchio
- nessun gruppo mette in relazione la normale con l'angolo
- gli studenti fanno molta fatica a stabilire che gli angoli di incidenza e di riflessione, misurati rispetto alla normale, sono uguali
- un gruppo, particolarmente soddisfatto per aver previsto ogni cosa, prova a posizionare il birillo a laser spento e cerca di dirigere correttamente il raggio, ma non è facile.

7Successivamente, quando viene proposto il quesito successivo, cioè trovare la traiettoria del raggio luminoso che colpisce il bersaglio, si osserva che:

- o qualche gruppo fa delle ipotesi molto elaborate (fanno il punto medio della distanza tra birillo e laser, lo proiettano ortogonalmente sullo specchio …)
- o viene fatta notare l'immagine virtuale del birillo al di là dello specchio a tutti i gruppi, ma impiegano moltissimo tempo a capire, e devono essere tutti guidati con decisione.

Dal punto di vista emotivo, durante la sperimentazione si rilevano momenti di vero entusiasmo quando le proprie congetture sono verificate sperimentalmente.

Variazioni rispetto all'originale

La proposta delle prime 3 domande della C1 si esaurisce il primo pomeriggio. L'incontro successivo si apre con un richiamo all'appuntamento precedente sottolineando alcune questioni. Prendendo poi spunto dalle osservazioni fatte dai ragazzi durante la lezione viene la curiosità di vedere un po' la forma di piazza San Pietro. Si cerca, con Google, una fotografia dall'alto della piazza, la si proietta sulla lavagna interattiva e si tracciano i suoi contorni. La piazza sembra essere ellittica. Un gruppo si appassiona e cerca di determinarne i fuochi per tentativi. Si scopre però che la piazza in realtà non è di forma ellittica, ma sono due archi di cerchio.

Si visita assieme un sito (http:/www.museo.unimo.it) contenente il catalogo completo dei modelli di Macchine Matematiche di interesse storico e didattico raccolti presso il Laboratorio di Matematica del Museo Universitario di Storia Naturale e della Strumentazione Scientifica di Modena. Si commentano brevemente alcuni ellissografi: macchine che nel corso della storia hanno permesso di costruire ellissi.

Scheda C2 - Tempi

2 lezioni da 120 minuti	4 ore

Risposte degli studenti

d1: Una ragazza disegna subito, senza esitare, il percorso minimo, ricollegandosi, dice lei, alla teoria osservata con il laser. Fa il prolungamento del raggio incidente fino al punto B', simmetrico a B rispetto alla retta r. Prova altri percorsi e vede che è il più corto perché l'ha misurato. Il resto del gruppo è d'accordo. Provano ad andare da B ad A, a spostare i punti A e B avvicinandoli, allineandoli … e trovano tutti i percorsi minimi.

Negli altri gruppi continuano a fare delle misurazioni con il righello e fanno molta fatica a vedere le cose, anche se guidati.

Cercano qualche proprietà dei triangoli che spieghi questa situazione, ma non è facile. Con alcune difficoltà e sempre guidati ed aiutati dall'insegnante tutti i gruppi riescono a dimostrare il teorema di Erone;

d2: viene affrontato solo da un gruppo, al quale risulta evidente che le rette soluzioni sono le tangenti alla curva nel punto P un po' perché si vede e un po' perché non possono far passare la retta dentro la curva;

d3: impegna il gruppo per un certo tempo; capiscono tutti facilmente che il percorso APB è il più corto perché hanno già dalla prima lezione il concetto di ellisse e capiscono che al punto P, e a tutti i punti appartenenti all'ellisse, arrivo con il cordoncino puntato nei fuochi, al punto Q, esterno all'ellisse non arrivo, perché il cordoncino è corto. Il problema è esprimere questi concetti in lingua italiana e formalizzarli.

I ragazzi fanno molta più fatica di quanto ci si aspettava e sembra che l'entusiasmo mostrato negli incontri precedenti stia venendo meno.

Variazioni rispetto all'originale

Arrivati alla discussione del punto 3 si decide di differenziare il percorso rispetto a quello proposto. I ragazzi hanno trovato molte difficoltà nella formalizzazione e non si vuole far perdere loro la voglia di impegnarsi, ricordando che l'attività è pomeridiana e facoltativa.

In quest'ultima lezione si è proiettato un'ellisse -utilizzando il programma Geogebra - sulla lavagna interattiva e si è disegnato il percorso di una pallina che partendo dal fuoco, rimbalza sul bordo e passa per l'altro fuoco. Ogni studente viene fornito di una fotocopia che rappresenta un'ellisse con i suoi fuochi. Ciascuno deve disegnare quello che secondo lui succederebbe qualora la biglia, partendo da un fuoco, continuasse a rimbalzare all'infinito all'interno dell'ellisse. Così siamo arrivati rapidamente al moto perpetuo! Le soluzioni trovate sono in generale corrette (fa eccezione una ragazza che è riuscita a far rimbalzare la pallina su quasi tutti i punti dell'ellisse); le risposte vengono verificate mostrando la simulazione del CD. Cerchiamo di far capire ai ragazzi che c'è un collegamento tra i rimbalzi sul biliardo ellittico e la riflessione sullo specchio del raggio laser. Ingrandendo sempre di più localmente la curva e la sua tangente nel punto C si vede che per il punto C la curva si comporta proprio come la tangente (vediamo un ingrandimento sulla lavagna interattiva). A questo punto si propongono ai ragazzi le schede con gli esercizi 1 e 2 Più o meno tutti traggono le giuste conclusioni, qualcuno con qualche aiuto, altri autonomamente. Si propone la costruzione dell'ellisse con l'inviluppo delle tangenti partendo da un cerchio disegnato sul foglio e da un punto A interno ad esso. Ogni ragazzo trova l'ellisse e poi può vedere una costruzione con

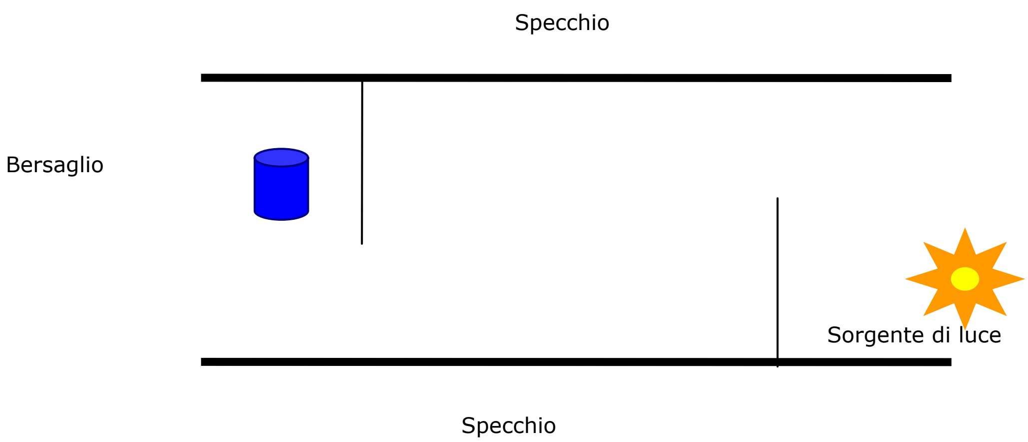
Geogebra che ne giustifica l'esistenza. Viene somministrata la verifica finale individualmente. Infine usando il materiale della scuola, i coni, si mostra infine che l'ellisse è una sezione di cono.

Verifiche

Tempi	30 minuti	
Tipologia e obiettivi	Esercizi a risposta aperta	
Esiti	Esercizio 1	Esercizio 2
	4 alunne su 19 rispondono correttamente (3 alunne della classe terza ed 1 della classe prima) 6 alunne intuiscono la risposta ma non la esplicano correttamente 7 alunne rispondono in modo non corretto 2 non svolgono la consegna	9 rispondono correttamente alla prima parte del quesito 6 rispondono in modo non corretto 4 non svolgono la consegna nessuna alunna risponde alla seconda parte dell'esercizio
considerazioni	Tutte le alunne che risolvono correttamente l'esercizio 1 risolvono correttamente anche la prima parte del 2 (21%). Sono 7 le alunne hanno risposto non correttamente o non hanno risposto ad entrambi i quesiti (36%). Si può dunque concludere che forse l'argomento non è stato compreso in modo efficace nonostante il tempo ad esso dedicato.	

Esercizio 1

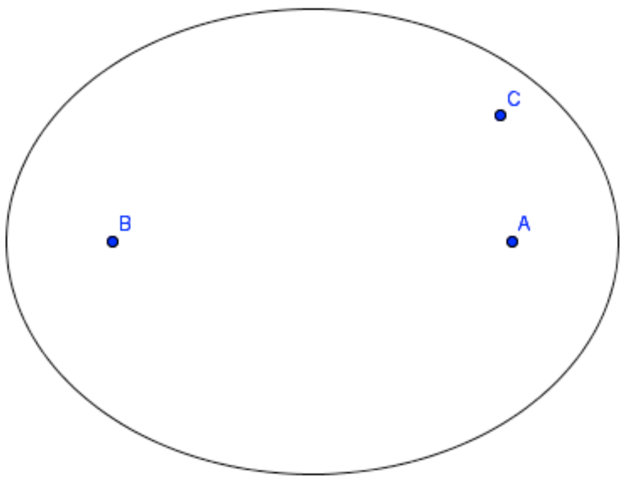
Dati due specchi paralleli, un laser (o una qualsiasi sorgente di luce), due ostacoli posti perpendicolarmente agli specchi, un bersaglio come in figura, come dovresti orientare il raggio per colpire il bersaglio?



Esercizio 2

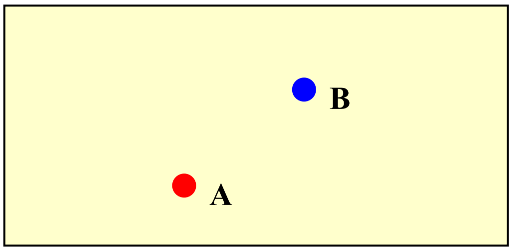
Dato il biliardo ellittico di fuochi A e B come puoi colpire con una pallina, posta in uno dei due fuochi, il birillo in C, rimbalzando sul bordo una volta?

E se il birillo occupa un fuoco e la pallina il punto C?



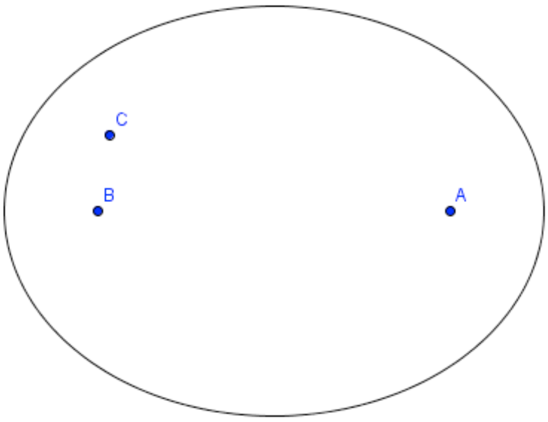
Verifica

1) In un normale biliardo rettangolare, in quale direzione si deve lanciare una biglia per colpirne un'altra dopo due sponde d'angolo?



2) Dato il biliardo ellittico di fuochi A e B come puoi colpire con una pallina, posta in uno dei due fuochi, il birillo in C, rimbalzando sul bordo due volte?

E se il birillo occupa un fuoco e la pallina il punto C?



Riflessione al Pilati di Cles

Fulvio Torresani, ITCG e Industriale "Antonio Pilati" - Cles

Classe IV ITI B indirizzo per l'informatica **Istituto Pilati - Cles**

Prima lezione (50 minuti): si svolge l'esperienza con il biliardino ellittico. L'insegnante presenta il materiale ed esegue alcuni lanci, poi gli studenti sono invitati a provare personalmente e individualmente senza rispettare un ordine particolare. L'interesse e la partecipazione sono alti. Sotto la guida e lo stimolo del tutor, i ragazzi pongono domande, formulano ipotesi (ad es. se pongo la biglia fuori dal punto segnato, essa colpirà ancora il birillo?) e sono sollecitati a prendere appunti su fatti sperimentali e osservazioni che a loro parere e in qualche caso per la sottolineatura dell'insegnante sono degni di nota. Si disegna anche qualche schizzo alla lavagna, soprattutto in occasione di brevi discussioni collettive. Nella parte finale, in collegamento ad alcune domande, s'introduce il principio di Erone accennando anche alle sue possibili generalizzazioni.

Seconda lezione (50 minuti): è eseguita l'esperienza riguardante la riflessione nello specchio del raggio di luce laser. Il tutor cerca di inquadrare gli aspetti salienti dell'esperimento, in particolare quelli attinenti l'immagine del bersaglio riflessa nello specchio collegandoli alla geometria del raggio e del suo prolungamento. Anche in questa esperienza gli studenti sono invitati a provare tutti individualmente e a riflettere su ciò che osservano. Il goniometro fornito si rivela utile.

Terza lezione (50 minuti): s'inizia l'inquadramento teorico seguendo il percorso presente nella scheda C2. In modo particolare si cura l'argomentazione geometrica del quesito 1 (pag. 60 della bozza) sottolineando la felice idea del prolungamento. I primi collegamenti sono riferiti all'esperienza sulla riflessione del fascio di luce, sia perché offre un collegamento più immediato, sia poiché è più presente nella mente degli studenti essendo stata svolta in un tempo più vicino all'inquadramento che si sta descrivendo. Si esegue anche la descrizione dell'urto con i vettori v1 e v2 (pag. 61). L'inquadramento geometrico descritto è svolto dall'insegnante, ritenendolo troppo difficile e delicato per lasciarlo all'iniziativa e conduzione del gruppo classe. La trattazione tuttavia è condotta in modo da lasciare spazio e da stimolare interventi degli studenti.

Quarta lezione (50 minuti): si affronta la trattazione matematica delle proprietà focali riguardanti l'ellisse e la parabola soffermandosi sui problemi 3 (pag. 62 della bozza) e paragrafo (pag. 66). La lezione è condotta con le stesse modalità della terza. Alla fine delle dimostrazioni, dopo i chiarimenti dati e terminati gli interventi degli studenti, si presentano alcune applicazioni pratiche delle proprietà focali (pag. 67) che ravvivano l'interesse degli studenti.

Quinta lezione (50 minuti): è dedicata ad un riesame complessivo dell'inquadramento teorico, nell'intento non solo di recuperare alcuni aspetti difficili, ma soprattutto per cercare di facilitare l'acquisizione da parte dei ragazzi di un metodo e di alcune idee portanti e unitarie presenti nella diversità delle esperienze, dei problemi e degli aspetti trattati nell'inquadramento teorico.

Ritengo importante che la scuola assolva il ruolo di inquadrare in modo logico, con un metodo chiaro, ordinato, che stimoli e favorisca la riflessione critica, di fronte all'affollarsi tumultuoso, veloce, a volte contraddittorio, nell'insieme spesso caotico e privo di spiegazioni coerenti, delle informazioni e nozioni che riceviamo nel mondo attuale.

Tempi

Come si desume dal numero e dalla durata delle lezioni sopra descritte, il tempo complessivo dedicato alla trattazione dell'argomento riflessione è stato di 250 minuti, pari a 4 ore e 10 minuti, articolato su cinque lezioni che si sono svolte in una settimana.

Prova scritta

Esercizio 1

Se una biglia colpisce una superficie liscia a profilo rettilineo secondo un angolo α, con quale inclinazione rimbalzerà?

Sapresti dare una motivazione del comportamento nel rimbalzo che prima hai affermato?

Se al posto della biglia avessimo un fascio di luce, i risultati cambierebbero?

Sviluppa le tue spiegazioni sia riferendoti a ciò che hai constatato sperimentando, che impostando e svolgendo un ragionamento logico-matematico. **Punti [10]**

Esercizio 2

Generalizziamo la situazione presente nel quesito 1 al caso dell'urto contro una superficie curva a profilo ellittico, se una biglia è lanciata da un fuoco verso il bordo dell'ellisse, come rimbalzerà?

a) Spiega quello che hai constatato *sperimentando* con il biliardino ellittico.

b) Dai *una motivazione matematica* riguardante il comportamento osservato della biglia.

Punti [10]

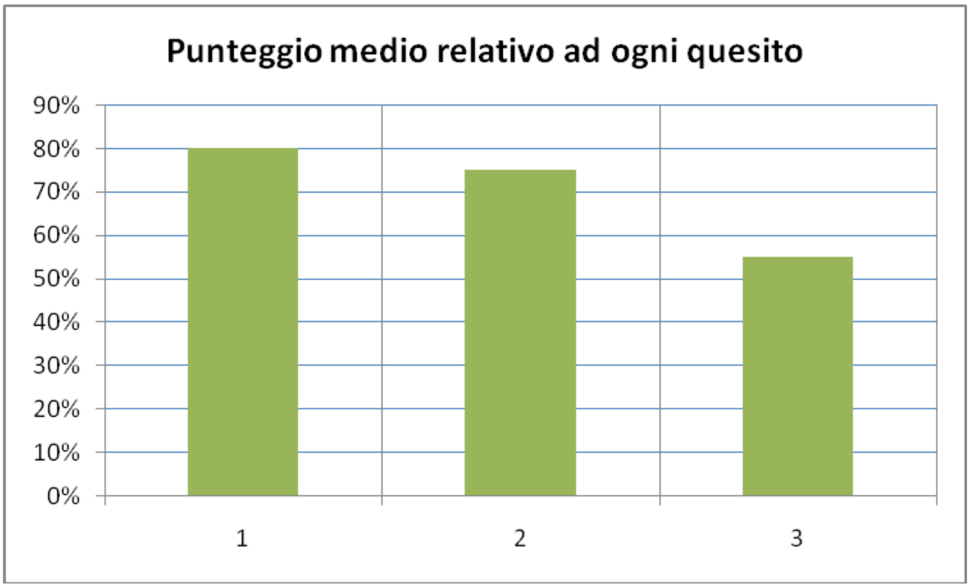
Esercizio 3

Perché le antenne più adatte a rilevare segnali deboli sono quelle cosiddette paraboliche?

Anche nel presente esercizio, fornisci dapprima una risposta sintetica basata su ciò che succede fisicamente alla radiazione intercettata dall'antenna e poi procedi sviluppando una motivazione matematica attinente alla tua affermazioni.

Punti [10]

Il punteggio medio delle risposte alle 3 domande è riportato nel grafico sottostante.



Il secondo anno di sperimentazione nella secondaria superiore

Nel secondo anno si è tentato di calare il laboratorio nella pratica didattica quotidiana.

I percorsi sono stati utilizzati segmentandoli in parti funzionali allo svolgimento del programma; così molti insegnanti hanno utilizzato il materiale, le attività di laboratorio, le dimostrazioni ed i grafici inserendoli nel curricolo delle sue classi.

Introduzione alle coniche con l'uso del laboratorio[9]

Cristina Bonmassar, Liceo "Leonardo Da Vinci" Trento

Dopo aver sperimentato nell'anno scolastico 2007/08 la parte di laboratorio riguardante la proprietà isoperimetrica, ho sentito la necessità di far diventare la metodologia laboratoriale una parte integrante della mia didattica quotidiana e non un episodio sporadico che nulla a che vedere con il resto dell'attività condotta durante l'anno scolastico. Tale necessità è nata dalla convinzione, maturata anche in seguito alla sperimentazione di cui sopra, che i concetti acquisiti tramite il laboratorio permangono nel tempo perché i ragazzi lavorano "con le mani" giocando un ruolo da protagonisti nella costruzione del significato degli oggetti manipolati.

Il laboratorio di matematica sulla proprietà isoperimetrica, quello sulla riflessione e la pubblicazione del Museo Tridentino di Scienze Naturali: LE CONICHE IN LABORATORIO - *percorsi per un laboratorio di matematica*[10] mi hanno fornito gli spunti per costruire un percorso di introduzione all'ellisse e all'iperbole, due coniche spesso trattate in modo frettoloso e poco efficace durante la trattazione della geometria analitica e subito dimenticate dagli studenti.

Il contesto

Ho lavorato in una classe terza di liceo scientifico doppia lingua (metà classe inglese - spagnolo e metà classe inglese - tedesco) composta da 25 alunni non particolarmente brillanti ma sempre ben disposti ad accettare le proposte dell'insegnante e a mettersi in gioco

Modalità di lavoro

I 25 alunni hanno lavorato divisi in gruppi da 3-4 alunni di formazione spontanea. La discussione è stata avviata dopo il completamento di ogni scheda. Qualche volta è stato chiesto agli alunni di completare la scheda a casa, rimandando la discussione alla lezione successiva. A casa gli alunni dovevano anche eseguire degli esercizi, spesso tolti dal loro libro di testo, di consolidamento dei concetti appresi in classe.

Tempi

Ellisse: 15 lezioni da 50 minuti ciascuna nel periodo febbraio-marzo

Iperbole: 12 lezioni da 50 minuti ciascuna nel periodo aprile-maggio

I tempi indicati sono comprensivi anche della verifica (una per ogni conica, della durata di 50 minuti) e della sua correzione.

Schede di lavoro sull'ellisse

Per queste schede ho attinto alla scheda B2 (Perimetro e area dei triangoli) del laboratorio sulla proprietà isoperimetrica e alla scheda C1 (Riflessione e rimbalzi) del laboratorio sulla riflessione

---

9 Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 3 e 4.

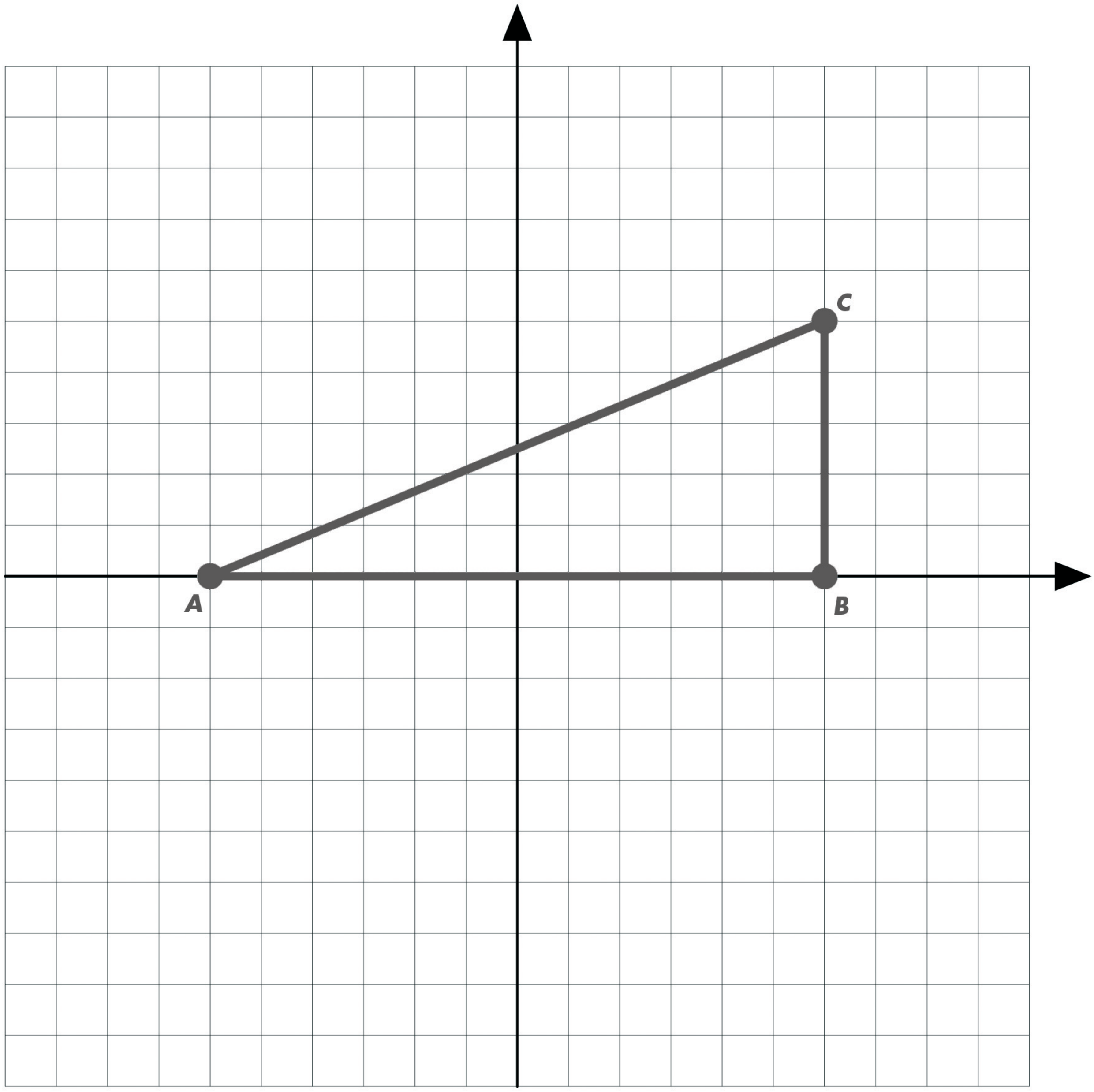
10 a cura di Maria Silvia De Francesco

Scheda 1 - Ellisse

Gli alunni hanno a disposizione l'asticella con i pioli e la cordicella per disegnare le ellissi

PERIMETRO E AREA DEI TRIANGOLI

Il triangolo rettangolo ABC in figura ha base 12 e perimetro 30. Riesci a disegnare altri triangoli aventi la stessa base AB e lo stesso perimetro? Come potresti descriverli tutti? Puoi aiutarti con l'asticella con i pioli e la cordicella.



Fra tutti i triangoli che puoi ottenere in questo modo, qual è quello di area maggiore?

Scheda 2 - Ellisse

Gli alunni hanno a disposizione fogli quadrettati, spago e puntine con cui tracciare le ellissi richieste prima di rispondere ad ogni domanda

L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE

1. Hai visto che il vertice C del triangolo di base AB 12 e perimetro 30 descrive un'ellisse. Riesci a trovare l'equazione di questa ellisse? Devi tradurre con gli strumenti dell'algebra la proprietà che caratterizza il punto C.

2. Se ora consideri un triangolo di base AB 9 e perimetro 30 come si modifica l'equazione dell'ellisse descritta dal vertice C?

3. Se infine consideri un triangolo di base AB 12 e perimetro 36, come si modifica ancora l'equazione dell'ellisse descritta dal vertice C?

4. Considera le tre equazioni delle ellissi precedentemente ottenute. Cosa hanno in comune queste tre equazioni? Quali informazioni che ottieni dalle varie equazioni puoi ritrovare immediatamente nei rispettivi grafici? Che legame esiste tra l'equazione e le dimensioni dell'ellisse? Utilizzando le considerazioni fatte, riesci a scrivere l'equazione di un generica ellisse?

Scheda 3 - Ellisse

L'EQUAZIONE DELL'ELLISSE E I SUOI FUOCHI

Hai scoperto che l'equazione dell'ellisse generica è

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,.$$

Come puoi da questa equazione risalire alla base AB del triangolo di perimetro fissato che ha generato l'ellisse?

Comincia con lo scrivere le coordinate dei punti in cui il grafico dell'ellisse interseca gli assi cartesiani, indicando con D e E i punti di intersezione con l'asse x (D di ascissa positiva) e con F e G i punti di intersezione con l'asse y (F di ordinata positiva).

....

Ponendo A $(-c,0)$ e B$(c,0)$ (i punti A e B vengono anche detti ***fuochi*** dell'ellisse) calcola quanto vale la somma dei due lati AC e BC del triangolo che ha generato l'ellisse, quando C coincide con D.

....

Calcola poi quanto vale la somma dei due lati AC e BC del triangolo che ha generato l'ellisse, quando C coincide con F.

....

Ricordando ora che per l'ellisse la somma AC + BC rimane costante, trovi che

$$c^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Scheda 4 - Ellisse

Gli alunni hanno a disposizione fogli di carta bianca

COSTRUIAMO CON LA CARTA

Ritaglia un cerchio di carta. Segna un punto F all'interno del cerchio. Piega il cerchio in modo da sovrapporre vari punti del suo bordo al punto F.

1) Che curva ottieni?

2) Quale condizione soddisfano i punti di tale curva?

3) Come sono poste le piegature rispetto all'ellisse?

Schede di lavoro sull'iperbole.

Per queste schede ho attinto alla scheda B1 (Perimetro e area dei rettangoli) del laboratorio sulla proprietà isoperimetrica e al complemento C (Proprietà focale dell'iperbole) del laboratorio sulla riflessione

Scheda 1 - Iperbole

Gli alunni hanno a disposizione fogli quadrettati su cui sono segnati gli assi cartesiani

PERIMETRO E AREA DEI RETTANGOLI

Disegna sul foglio a quadretti alcuni rettangoli di area 36 (quadretti), in modo che ognuno

abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.

Quale curva descrive il vertice opposto all'origine?

Qual è il rettangolo di area 36 che ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta.

Scheda 2 - Iperbole

Gli alunni hanno a disposizione fogli quadrettati su cui sono segnati gli assi cartesiani

L'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASINTOTI

1) Considera la curva $xy = 36$ e tracciane il grafico.

2) Considera ora invece la curva $xy = -36$ e traccia anche di essa il grafico.

3) Cosa noti confrontando i due grafici ottenuti?

4) Quali sono i punti dei due grafici per i quali è minima la somma delle loro distanze dagli assi cartesiani?

Scheda 3 - Iperbole

Gli alunni hanno a disposizione fogli di carta bianca

COSTRUIAMO CON L A CARTA

Disegna un cerchio di centro C e segna un punto P esterno al cerchio. Piega il foglio in modo da sovrapporre vari punti del cerchio al punto P.

1) Che curva ottieni?

2) Quale condizione soddisfano i punti di tale curva?

3) Come sono poste le piegature rispetto all'iperbole?

Scheda 4 - Iperbole

Gli alunni hanno a disposizione fogli quadrettati su cui sono segnati gli assi cartesiani

I FUOCHI DELL'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASINTOTI

Considera nuovamente l'iperbole $xy = 36$.

1) Indicati con F_1 e F_2 i **fuochi** dell'iperbole (corrispondenti ai punti C e P della costruzione dell'iperbole con la carta) e con A_1 e A_2 i suoi vertici, calcola la lunghezza del raggio della circonferenza che ha generato l'iperbole.

   (*Suggerimento: traccia la retta che contiene* A_1, A_2, F_1, F_2 *e applica la proprietà dei punti dell'iperbole ad uno dei due vertici*)

2) Indicati genericamente i fuochi con $F(\pm c, \pm c)$ trova il valore di c applicando la proprietà dei punti dell'iperbole ad un punto P a tua scelta appartenente all'iperbole considerata.

Scheda 5 - Iperbole

Gli alunni hanno a disposizione fogli quadrettati su cui sono segnati gli assi cartesiani

L'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASSI

Considera nuovamente l'iperbole $xy = 36$.

Ruotando di 45° in senso orario la bisettrice del 1°-3° quadrante, l'iperbole si trova ad avere vertici e fuochi sull'asse x.

1) Scrivi le coordinate dei vertici e dei fuochi dell'iperbole.

2) Applica ad un generico punto $P(x, y)$ la proprietà dei punti dell'iperbole. Quale equazione ottieni?

__Scheda 6 - Iperbole__

L'IPERBOLE EQUILATERA RIFERITA AGLI ASSI

Considera la generica iperbole $xy = k$ e rifai il percorso indicato nelle schede 4 e 5.

In particolare scrivi, in funzione di *k*, le coordinate dei vertici, dei fuochi e l'equazione dell'iperbole riferita agli assi.

Quale potrebbe essere l'equazione canonica di un iperbole equilatera riferita agli assi?

La somministrazione delle schede è stata poi seguita dalla risoluzione di esercizi di tipo standard (reperibili su tutti i libri di testo) su ellisse ed iperbole.

Per concludere il lavoro sono stati forniti alcuni esempi di come queste coniche si possono ritrovare nel quotidiano: orbite dei corpi celesti, architettura, specchi ustori, antenne, telescopi e miraggi.

Verifiche

Ogni verifica è composta da una parte più standard e da una parte in cui occorre lavorare come indicato nelle schede proposte in classe.

Verifica sull'ellisse

1) Determina l'equazione dell'ellisse con i fuochi sull'asse y, avente eccentricità $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e passante per il punto $\left(1, \sqrt{2}\right)$. *(1 punto)*

2) Calcola l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $y = \frac{2}{3}x$ con l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{15} + \frac{y^2}{10} = 1$ ed F è il fuoco dell'ellisse di ascissa positiva. *(1 punto)*

3) Calcola l'area del quadrato inscritto nell'ellisse di equazione $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$. *(1 punto)*

4) Stabilisci per quali valori del parametro *k* l'equazione $\frac{x^2}{2k+1} + \frac{y^2}{3-k} = 1$ rappresenta:

i. Un'ellisse
ii. Una circonferenza
iii. Un'ellisse con i fuochi sull'asse y
iv. Un'ellisse con i fuochi sull'asse x di eccentricità $\frac{1}{2}$ *(1 punto)*

5) Senza fare tutti i conti, ma sfruttando le proprietà geometriche, trova l'equazione dell'ellisse generata dai triangoli di base 4 e perimetro 12. *(1 punto)*

6) Data l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, con $a > b$, determina quale relazione deve sussistere tra a^2 e b^2 affinché il triangolo avente per vertici i due fuochi dell'ellisse e uno dei due vertici dell'ellisse sull'asse y sia equilatero. *(1 punto)*

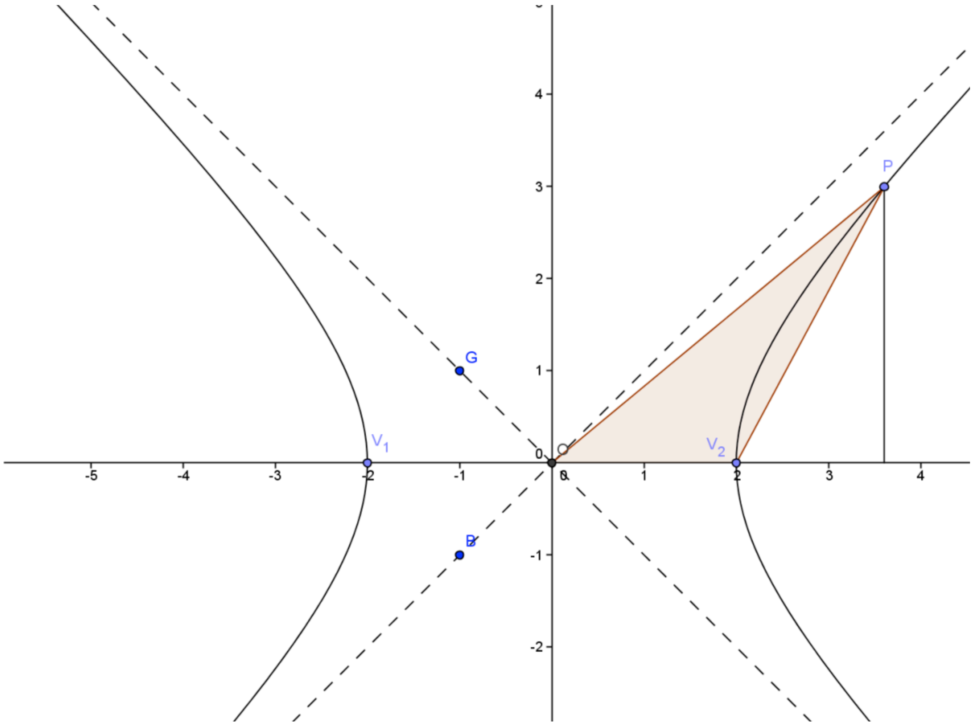
7) Sia P un punto dell'ellisse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e siano r e s le rette passanti per i fuochi e per il punto P. Dimostra che la retta tangente all'ellisse in P è una delle bisettrici degli angoli formati da r e s; di conseguenza la perpendicolare in P è la bisettrice della rimanente coppia di angoli. *(1 punto)*

Verifica sull'iperbole

1) Determina l'equazione dell'iperbole che ha un fuoco in $F(-\sqrt{7},0)$ e un vertice in $(2,0)$ e tracciane il grafico. *(1 punto)*

2) Determina l'equazione dell'iperbole con i fuochi sull'asse y con $a = 3$ ed eccentricità $\dfrac{\sqrt{34}}{5}$ e tracciane il grafico. *(1 punto)*

3) L'iperbole in figura ha un vertice in $(-2,0)$ e asintoti di equazioni $y = \pm x$. Nel triangolo l'altezza uscente da P è $\dfrac{3}{2}$ della base. Calcola le coordinate di P. *(1 punto)*



4) Traccia il grafico della funzione $y = \dfrac{4-2x}{x-1}$. *(1 punto)*

5) Trova l'equazione della funzione omografica di centro $(-3,-2)$ e passante per il punto $P(-1,1)$. *(1 punto)*

6) Sia P un punto dell'iperbole di equazione $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ e siano r e s le rette passanti per i fuochi e per il punto P. Dimostra che la retta tangente all'iperbole in P è una delle bisettrici degli angoli formati da r e s. *(1 punto)*

Conclusioni

L'attività laboratoriale è stata ben accettata dai ragazzi ed è stata gratificante anche per quegli alunni che, pur avendo un buon intuito, fanno fatica a formalizzare e ad arrivare in fondo ad un calcolo senza errori.

Gli studenti hanno dichiarato che “così è più divertente” e che “avendoci messo le mani, sarà più facile ricordarsi queste cose”. A questo proposito è significativo il fatto che i risultati migliori nelle verifiche si sono ottenuti proprio sulla parte meno standard, cioè su quella che richiedeva meno calcoli e più capacità di lavorare come durante l’attività di laboratorio.

Credo quindi che possiamo vincere la sfida di utilizzare l’attività laboratoriale nella didattica di ogni giorno: per noi insegnanti comporta fatica e dispendio di energia, ma ne vale la pena se il risultato è quello di avere studenti più consapevoli degli strumenti matematici che si ritrovano tra le mani.

Laboratorio con i cilindri in un percorso sul risparmio energetico[11]

Patrizia Franzoni e **Roberta Scarpa**, Liceo “Antonio Rosmini” Trento

Contesto

- Contenitori e spreco di materiali
- Corso pomeridiano per le classi I, II, III
- Corso facoltativo
- 4 incontri settimanali di 2 ore
- 7 insegnanti coinvolti
- 51 studenti coinvolti, provenienti dai tre indirizzi: Socio Psico Pedagogico, Liceo delle Scienze Sociali, Liceo Linguistico

Obiettivi

- Avvicinare gli studenti allo studio della geometria, in un contesto laboratoriale
- Sollecitare la capacità d’intuizione, le abilità di calcolo e di formalizzazione già acquisite, lavorando quindi sulle loro conoscenze pregresse
- Sperimentare il processo di costruzione di un modello matematico idoneo a descrivere il fenomeno osservato
- Sviluppare la capacità di formulare congetture e di sottoporle a verifica

I° incontro

Quanto costa produrre lattine?

Costo energetico per la produzione di lattine in Italia

- Ricerca guidata nel web
- Calcolo del costo energetico totale
- Calcolo del possibile risparmio attraverso il riciclaggio
- Ruolo della geometria nella ricerca di un metodo ulteriore per la riduzione dei consumi

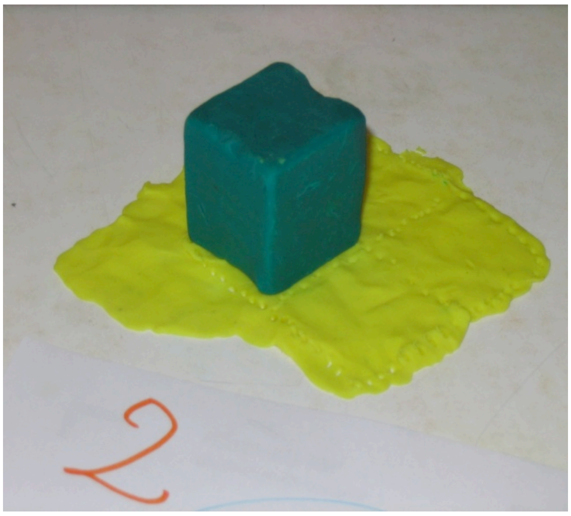
---

11 Le schede a cui si fa riferimento in questa sezione si possono consultare in Allegato 3.

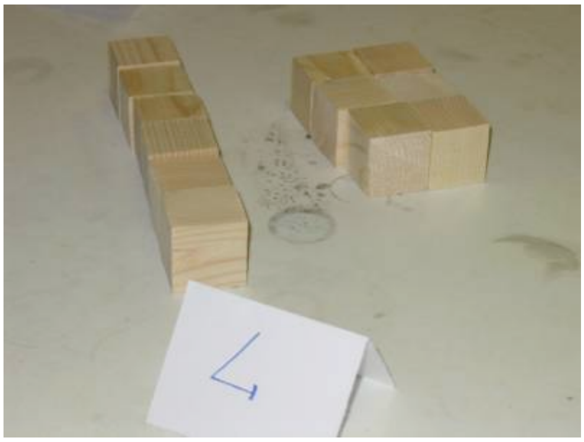
Con la plastilina

Due palline uguali

Due palline diverse



Con il legno

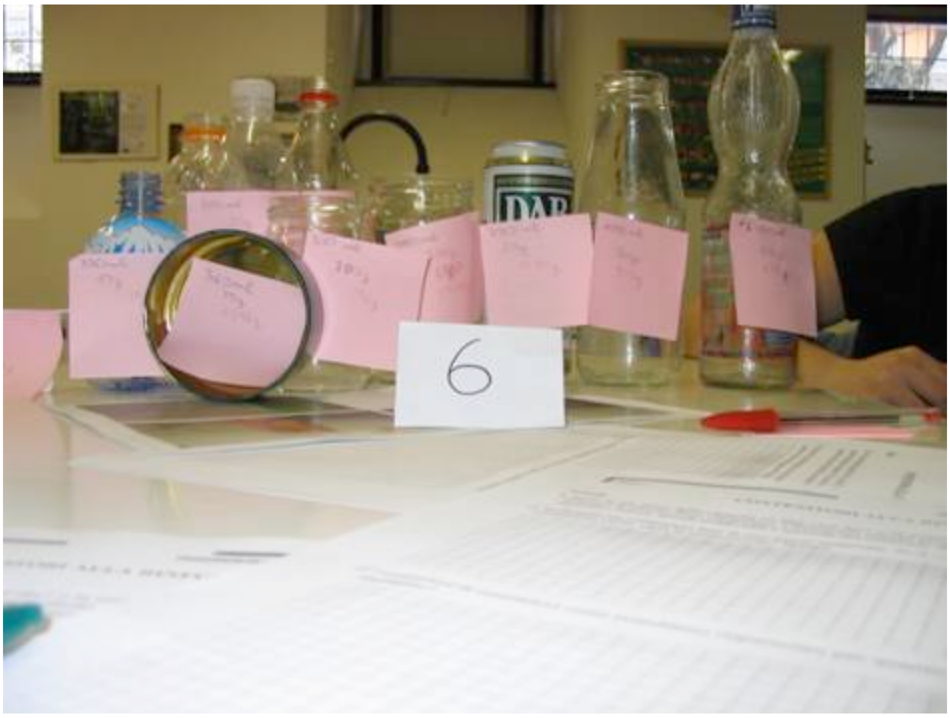


II° incontro

Contenitori alla rinfusa

Vari contenitori

- **Stima e misura della capacità**
- **Trasformazioni di unità di misura**
- **Individuazione della forma che "contiene più liquido"**



III° incontro

Cilindri e lattine

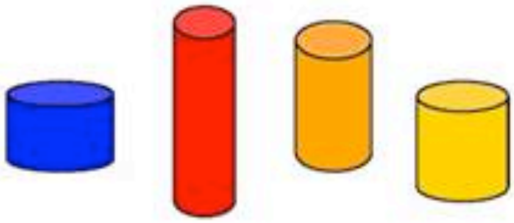
Cilindri equivolumetrici

- Cilindri in legno: misura dell’altezza e del diametro
- Calcolo di area totale e volume
- Individuazione del cilindro “migliore”

CILINDRI E LATTINE

Scheda 1

Osserva i cilindri di vari colori.



1. Con il calibro misura diametro e altezza, poi completa la seguente tabella.

CILINDRO	Diametro di base (cm)	Altezza (cm)	Area totale (cm^2)	Volume (cm^3)
Rosso				
Giallo				
Arancio				
Blu				

2. Cosa noti nei valori in tabella? Come sono i volumi dei cilindri? Come sono le aree totali?

3. Quale cilindro ha area minore? Che particolarità hanno diametro e altezza di questo cilindro?

D1 - Tutti compilano la tabella, il numero di cifre decimali è variabile.

Si osservano:

scarsa abilità nell'acquisizione di misure sperimentali e nella loro elaborazione;

gli studenti non ricordano le formule di area e volume e non riescono a ricavarle.

D2 - Tutti osservano che i volumi sono uguali ma non lo sono le aree, anche se non sempre utilizzano un linguaggio appropriato, ad esempio: " I volumi sono simili, mentre le aree sono tutte diverse." "I cilindri hanno tutti lo stesso volume, ma cambia l'area, quindi le aree più estese sono di quei cilindri che sono più deformi".

Buona intuizione delle proprietà fondamentali degli oggetti osservati, difficoltà nella descrizione con un linguaggio appropriato.

D3 - Tutti rispondono correttamente, anche dal punto di vista linguistico.

- Ora torniamo alle lattine …
- Calcolo di diametro e altezza di un cilindro di volume 330 cm^3 di area minima
- Costruzione di un modellino di "lattina ideale"
- Calcolo della possibile riduzione del consumo energetico utilizzando lattine uguali al modello
- Perché non è quello che troviamo in commercio?

Scheda 2

Torniamo alla lattina di volume 330 cm^3.

4. Quanto dovrebbero misurare sia il diametro che l'altezza della lattina affinché l'area della superficie sia minima?

A1. Utilizza il cartoncino a tua disposizione per realizzare il modello di una lattina con le dimensioni che hai calcolato.

Confronta il tuo modello con le lattine che troviamo in commercio…

Rivedi quanto si è detto riguardo al consumo energetico per la produzione di lattine in Italia.

5. Di quanto si potrebbe ridurre tale consumo utilizzando lattine uguali al modello che hai costruito? Come lo calcoleresti? Descrivi i passaggi che faresti.

D4 - La maggioranza risponde correttamente e, inaspettatamente fa uso di un'equazione di terzo grado.

A1

D5 - Circa la metà prova a rispondere. In particolare la metà riesce a quantificare il risparmio, gli altri si limitano al calcolo della differenza tra le aree della lattina reale e ideale.

Puoi scoprirlo anche completando questa tabella.

Area totale lattina alluminio	$A_l =$
Area totale "lattina modello"	$A_M =$
Massa lattina alluminio (senza anellino di apertura)	$m_A =$
Quale massa (m_M) avrebbe la "lattina modello" se fosse in alluminio?	$m_M : m_A = A_M : A_l$ $m_M =$
Differenza di massa tra le lattine	$D = m_A - m_M =$
Numero lattine impiegate in Italia in un anno	$N_L =$
Quantità di alluminio risparmiato	$M_R = D \cdot N_L =$
Quantità di energia impiegata per produrre un chilogrammo di alluminio	$Q =$
Energia risparmiata se le lattine fossero di forma uguale al modello	$M_R \cdot Q =$

Ma allora, perché si producono lattine differenti? La risposta nella fotocopia di alcune pagine di un libretto divulgativo in lingua inglese…

"The Economic Naturalist: Why Economics Explains Almost Everything"
by Robert H. Frank Basic

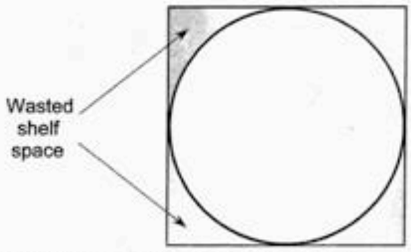
Why is milk sold in rectangular containers, while soft drinks are sold in round ones?

Virtually all soft-drink containers, whether aluminium or glass, are cylindrical. Milk containers, certainly plastic and cardboard ones, are almost always rectangular in cross-section. Rectangular containers use shelf space more economically than cylindrical ones. So why do soft-drink producers stick with cylindrical containers?

In the case of aluminium containers, one reason is that the cylindrical shape is better able to withstand the pressure that can build up with carbonated drinks. Another possibility is that because soft drinks are often consumed directly from the container, the extra cost of storing cylindrical containers is justified because they fit more comfortably in the hand. This might help account for why glass soft-drink containers are cylindrical, even though a square glass container could easily withstand the pressure from carbonated drinks. The hand-friendliness of the

21

The Economic Naturalist



If milk containers were cylindrical, we would need larger refrigerators

container is less of an issue for milk, which is typically not consumed directly from the container.

But even if most people drank milk straight from the carton, the cost-benefit principle suggests that it would be unlikely to be sold in cylindrical containers. Although rectangular containers economise on shelf space, irrespective of their contents, the shelf space they save is more valuable in the case of milk than in the case of soft drinks. Most soft drinks in supermarkets are stored on open shelves, which are cheap to buy and have no operating costs. Milk is exclusively stored in refrigerated cabinets, which are both expensive to purchase and costly to operate. Shelf space inside these cabinets thus comes at a premium, and hence the added benefit of packaging milk in rectangular containers.

Why are aluminium soft-drinks cans more expensive to produce than necessary? *(Charles Redding)*

The task of a soft-drinks can is to contain the drink within it. The 355-millilitre (12-fluid ounce) aluminium soft-drink

22

Rectangular Milk Cartons and Cylindrical Soft-Drinks Cans

Standard soft-drink cans would require less aluminium if they were shorter and wider.
DRAWING BY MICK STEVENS

containers sold in most parts of the world are cylinders almost twice as tall (height = 12 centimetres) as they are wide (diameter = 6.5 centimetres). Making these cans shorter and wider would require substantially less aluminium. For example, a cylindrical can with a height of 7.8 centimetres and a diameter of 7.6 centimetres would require approximately 30 per cent less aluminium than the standard can yet would hold the same volume. Since the shorter cans would be cheaper to produce, why are soft drinks still sold in the taller ones?

One possible answer is that consumers are fooled by the vertical illusion – an optical illusion well known to psychologists. When asked which of the two bars shown in the figure on the following page is longer, for example, most people answer confidently that it is the vertical one. Yet as you can easily verify, the two bars are exactly the same length.

Consumers might thus be reluctant to purchase soft drinks sold in shorter cans, believing they contain less cola. This explanation,

23

The Economic Naturalist

The vertical illusion: although the vertical bar seems longer, it isn't.

however, would appear to imply that rival sellers were passing up easy profit opportunities. That is, if an optical illusion were the only thing preventing consumers from choosing shorter cans, rival sellers could offer cola in such cans, pointing out in plain language that their containers hold exactly the same amount as traditional cans. And since the shorter cans are cheaper to produce, sellers who sold soft drinks in them could offer slightly lower prices than traditional producers and still cover all their costs. So if an optical illusion were the only problem, there would be easy profit opportunities available to rival sellers.

Another possibility is that soft-drinks buyers prefer the looks of the taller can. Even if they knew it contained exactly the same amount of cola as the shorter version, they might thus be willing to pay a small premium for it, just as they are willing to pay more for a hotel room with a nice view.

Product design features sometimes reflect sophisticated considerations of how different features would affect user behaviour. Someone who wants to avoid speeding tickets, for example, might be willing to pay extra for a car equipped to sound a warning when its driver exceeds the posted speed limit. The next example illustrates a product that reflects strategic decisions on the part of manufacturers about how specific design features will affect product use.

IV° incontro

Altri contenitori…

Scatoloni di cartone

- Costruzione di uno scatolone in scala 1:5
- Proporzioni tra misure lineari, superficiali e volumetriche
- Scatolone a volume e altezza fissati: progettare la base per minimizzare il cartoncino

Laboratorio come biblioteca di problemi concreti

Maddalena Litterini, Liceo Scientifico "Galileo Galilei" Trento

Nella mia esperienza lavorativa mi sono trovata alcune volte di fronte ad episodi che mi hanno fatto riflettere.

I EPISODIO

Durante un'esercitazione scritta in quinta liceo era stato assegnato il seguente problema:

Qual è il valore minimo della funzione $f(x) = 6(x-196)^2 + 60$?

Si chiede di risolvere l'esercizio senza l'uso delle derivate.

Molti studenti nel risolvere l'esercizio avevano svolto il quadrato del binomio e poi determinato le coordinate del vertice della parabola; altri non sapendo che pesci pigliare avevano risolto l'esercizio con l'uso delle derivate.

II EPISODIO

Esame di Stato 2006

Un filo metallico di **lunghezza *l*** viene utilizzato per delimitare il perimetro di **un'aiuola rettangolare**.

a) Qual è l'aiuola di **area massima** che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:

b) la somma delle due aree sia minima?

c) la somma delle due aree sia massima?

Pochi tra gli studenti che hanno dovuto sostenere questo esame ha scelto di affrontare questo problema a favore del secondo molto più complesso!!

Prendendo spunto da questi episodi mi sono convinta dell'importanza di affrontare questo genere di problemi molto prima del periodo limitato alla quinta scientifico come mera applicazione dello studio delle derivate.

I problemi di massimo e minimo sono interessanti, perché la loro risoluzione può essere fatta con diverse tecniche matematiche come

- disuguaglianze
- geometria analitica
- goniometria
- simulazione con Cabri
- derivate

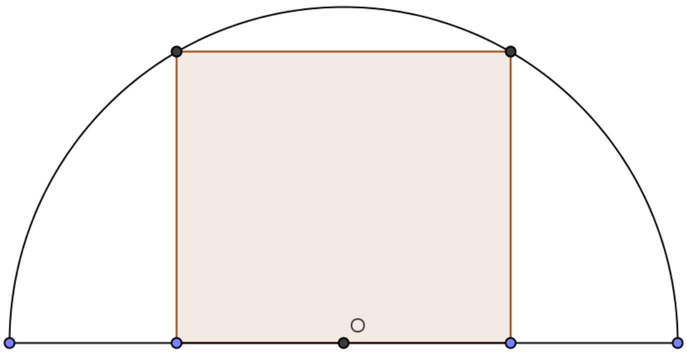
e quindi si possono affrontare a partire da un biennio.

Riporto di seguito due problemi e come si possono risolvere secondo quanto detto.

Il primo è preso da un libro di testo di matematica, mentre il secondo è un problema di fisica.

PRIMO PROBLEMA

Determinare il rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza di raggio R.



Risoluzione

L'area si può esprimere in funzione di metà lato del rettangolo trovando

$$A(x) = 2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$$

Per giungere alla soluzione si può *naturalmente ricorrere alle derivate* oppure se si porta all'interno della radice il fattore x si osserva che si arriva alla determinazione di due fattori la cui somma è costante e cioè R^2.

L'area è massima quando i due fattori sono uguali.

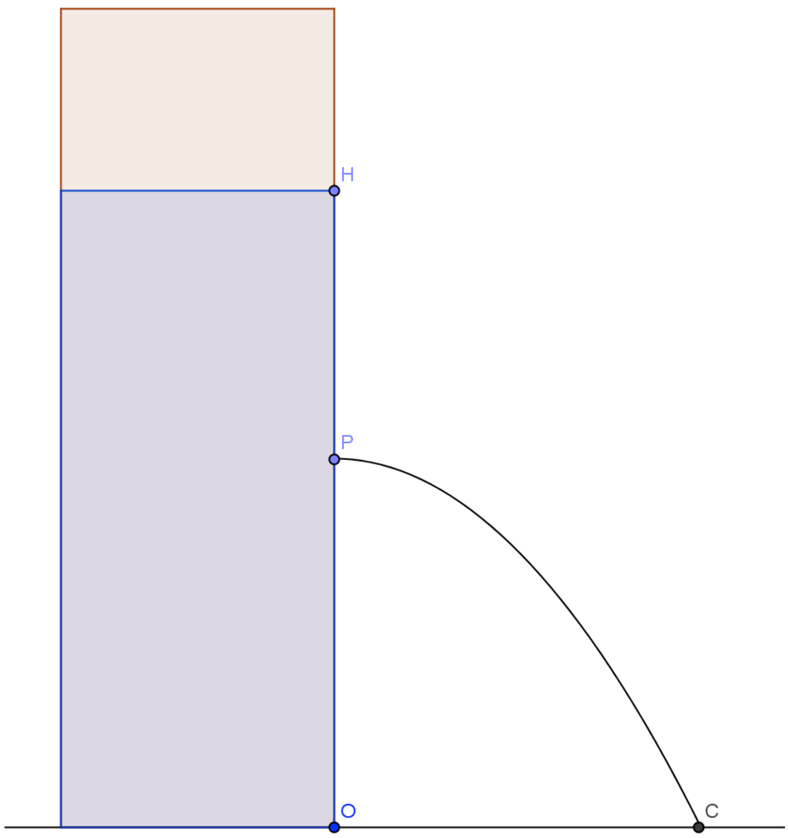
In alternativa si può esprimere l'area in funzione di un angolo

$$A(\theta) = R^2 \cdot \sin(2\theta)$$

e poi giungere alla soluzione con osservazioni opportune sulla funzione goniometrica.

SECONDO PROBLEMA

In un grande serbatoio aperto, con pareti verticali, è contenuta dell'acqua fino ad una certa altezza ***H***. Si pratica un foro in una della pareti ad una profondità ***h*** al di sotto del livello dell'acqua. Calcola per quale valore di ***h*** è massima la distanza *D* tra il piede della parete e il punto in cui l'acqua colpisce il suolo.



Risoluzione

Con semplici considerazioni si giunge all'espressione

$$D = \sqrt{4h \cdot (H - h)}$$

per la quale valgono le considerazioni fatte in precedenza.

Il laboratorio di matematica nell'Istituto Tecnico Industriale

Fulvio Torresani, ITCG e Industriale "Antonio Pilati" – Cles

Gli studenti di un tecnico hanno un'esperienza generalmente non trascurabile dell'attività di laboratorio in generale per l'uso che se ne fa nel biennio nella didattica delle materie tecniche e scientifiche e che prosegue durante il triennio nelle materie tecniche. Ci si rende conto di ciò anche materialmente e formalmente per la presenza degli insegnanti cosiddetti tecnico pratici (ITP), dei tecnici di laboratorio e della componente di voto "pratico" in alcune discipline. Per quanto concerne la matematica però tale esperienza o non c'è o e' strettamente legata all'utilizzo dei computer (a volte costruzione di semplici programmi).

Da una parte quindi gli studenti hanno pratica del laboratorio ma dall'altra non di quello matematico. È di conseguenza importante per l'insegnante tener conto dell'esperienza maturata dagli studenti nell'attività laboratoriale in generale, per esempio cercando e sfruttando in tal senso delle sinergie, ma è anche essenziale aver presente la limitatezza o l'assenza di esperienze di questo tipo nell'ambito della matematica.

Punti di forza

- Ci si aggancia alla predilezione dello studente per la tecnica e quindi per le realizzazioni concrete, materiali, per cose costituite da oggetti reali e non da concetti astratti.
- Si possono così attivare interesse e attenzione.
- Si può sfruttare l'esperienza nell'attività di laboratorio maturata dagli studenti nelle materie scientifiche e tecniche.
- Si può realizzare un lavoro in comune con i colleghi delle materie scientifiche e/o tecniche, specialmente nel biennio.
- Lo studente riesce ad applicare in modo più efficace la matematica nelle discipline tecniche.
- Per la maggioranza degli allievi si tratta di attività non pesanti.

Elementi di debolezza

- Una certa dimestichezza e confidenza con l'attività sperimentale può portare ad affrontare il laboratorio con atteggiamenti di faciloneria e superficialità.
- Possono emergere elementi di anarchia e disordine.
- Si può rinforzare o generare, più facilmente che in altre scuole, un'idea errata di dimostrazione.

Momento critico

(comune a ogni realtà scolastica ma più accentuato negli istituti tecnici)

- Il passaggio sempre delicato e spesso difficile dalle informazioni e consapevolezze ottenute nella pratica laboratoriale alla costruzione di un modello matematico.

osservazioni

e consapevolezze

congettura(e)

modello matematico

(con deduzioni e/o dimostrazioni)

Difficoltà diffuse

Per lo studente:

- Attivare le idee matematiche appropriate a partire dalla realtà osservata (ruolo chiave dell'insegnante);
- capire i vari passaggi logico-matematici;
- costruire il modello matematico.

Per l'insegnante:

- Fino a che punto guidare e suggerire?
- Tempo a disposizione: è bene procedere prendendosi il tempo necessario lasciando spazio alla discussione, ma poi anche rispiegare il percorso dall'inizio con compiutezza e scioltezza.

Anche lo studente dovrebbe, in orario extracurricolare, studiare l'argomento rifacendo tutto il percorso. L'insegnante dovrebbe tener conto del tempo necessario allo studente per ripensare l'attività prevedendone l'impegno per il lavoro individuale, evitando ad esempio di sovraccaricarlo con la necessità di eseguire contemporaneamente lo studio degli argomenti svolti in modo convenzionale.

In conclusione

Ci sono delle forti ragioni a favore per affrontare alcuni temi basandoli sul laboratorio matematico, alcune di queste sono state nominate nei punti di forza esposti in precedenza, allacciandosi ad esse si può notare che spesso si ottiene un coinvolgimento motivazionale in studenti i quali altrimenti non provano stimoli positivi ed interesse nei confronti della matematica. Ciò avviene in particolare per coloro che hanno buone o discrete capacità ma generalmente non le sfruttano per carenza di motivazioni. Coloro che già presentano un profitto positivo sono rinforzati nella loro predisposizione ad apprendere. Più difficile è risultato recuperare ad un rendimento sufficiente quegli allievi con deboli capacità, anche quando sono supportati da un buon impegno, tuttavia anch'essi evidenziano spesso dei progressi, che si fermano però quasi sempre alla fase della congettura.

L'impatto dell'attività laboratoriale può quindi essere notevole, ma si può esplicare meglio se si conosce il contesto didattico complessivo degli istituti tecnici e lo si volge a favore dell'attività stessa.

Per visionare diversi dei materiali utilizzati è utile il sito con il seguente URL

http://matematita.science.unitn.it/laboratorio_max_min/

Riflessioni conclusive

Elisabetta Ossanna, Università di Trento

Il progetto "Matematica in laboratorio" costituisce un significativo esempio di ricerca - azione - formazione in cui sono entrati in sinergia diversi soggetti istituzionali che sul territorio si occupano di educazione: gli Istituti Scolastici, l'IPRASE e il Dipartimento di Matematica dell'Università di Trento. Ognuno all'interno delle proprie competenze ha contribuito a far crescere il progetto. Il lavoro si è svolto in un'alternanza di approfondimenti teorici, di attività di ricerca, di progettazione, di sperimentazione e di momenti di confronto al fine di riuscire a sperimentare in classe modalità didattiche adeguate.

Possiamo considerarlo un laboratorio in cui gli insegnanti stessi sono diventati i protagonisti della propria formazione avvalendosi della consulenza degli esperti, individuando gli obiettivi e operando in un ambiente collaborativo per raggiungerli. Anche se i docenti dei due gradi di scuola secondaria hanno lavorato parallelamente, non sono mancati i momenti di confronto, a mio parere potenziabili, che hanno permesso almeno di capire come la stessa attività possa essere declinata in modo diverso a seconda che il contesto sia quello della scuola secondaria di primo grado o di secondo.

Vorrei evidenziare alcuni aspetti che testimoniano come il progetto abbia inciso in modo positivo sull'esperienza professionale dei partecipanti.

Innanzitutto il fatto che il progetto si sia concluso con un pomeriggio in forma di workshop, interamente gestito dagli insegnanti e aperto al pubblico, in occasione del quale tutti i presenti hanno potuto apprezzare il lavoro di ricerca e di sperimentazione svolto, nonché l'efficacia di un intervento didattico di tipo laboratoriale. Inoltre è risultato evidente come in una qualsiasi classe si possa proficuamente e realisticamente utilizzare del materiale per realizzare un laboratorio di matematica, partendo almeno da materiali già esistenti, opportunamente progettati e cercando eventualmente di duplicarli.

Inoltre il progetto ha evidenziato come si possa partire da materiali e attività già strutturati, come il laboratorio di "**Massimi e minimi**", per riuscire agilmente a diventare consapevoli delle finalità da perseguire, dei contenuti da affrontare e degli strumenti (sia concettuali che concreti) da utilizzare, per poi conseguentemente avviare una sperimentazione in classe. Questo permette ad esempio di riproporre in classe un'attività strutturata finalizzata ad un particolare approfondimento, oppure di attivare un'attività laboratoriale (come nel caso delle attività sulla proprietà isoperimetrica) che può essere utilizzata come osservatorio privilegiato delle conoscenze e competenze di cui gli studenti sono portatori in un particolare momento del curriculum. L'apporto degli insegnanti è stato comunque attivo e prezioso, per il ruolo rivestito nell'evidenziare passaggi complessi e nel ripensare il trasferimento della proposta in attività didattica adeguata alla propria classe.

Il passo ulteriore fatto dal gruppo di lavoro è stato quello di reinterpretare, soprattutto nel secondo anno, la proposta del laboratorio "**Massimi e minimi**", suddividendo il percorso in modo da proporre materiali e attività specifiche come supporto alla didattica quotidiana, per esempio inserendo in modo organico segmenti del laboratorio per introdurre, comprendere e utilizzare concetti chiave previsti dal curriculum.

L'attenta osservazione eseguita dagli insegnanti nel loro lavoro di ricerca ha evidenziato come un'attività laboratoriale provochi reazioni diversificate negli studenti: si va dallo studente che ritrova motivazione e interesse in una materia, che considerava eccessivamente astratta, perché riesce a dare spazio alla sua intuizione, a chi manifesta una certa diffidenza perché si trova a suo agio in una modalità frontale e legata al formalismo (forse anche deresponsabilizzante per lo studente) e teme il disagio di una situazione nuova che gli sembra di non poter controllare con i soliti strumenti, fino allo studente che, alla ricerca di algoritmi standard da applicare in modo automatico, incontra, almeno inizialmente, le maggiori difficoltà. In ogni caso, superate le diffidenze iniziali, è risultata sempre un'attività che, rispetto ad una lezione tradizionale, in molti studenti ha portato un maggiore coinvolgimento sul piano relazionale e una migliore consapevolezza dei concetti utilizzati. Dobbiamo però tenere conto anche del fatto che le reazioni degli studenti ad attività di tipo laboratoriale dovrebbero essere interpretate avendo in mente che gli stessi non sono mediamente abituati né a lavorare in gruppo, né ad associare l'apprendimento della matematica ad un'esperienza di laboratorio, né a fare delle previsioni ed osservare analogie e differenze. Inoltre purtroppo non è inusuale che il laboratorio sia concepito come un momento ludico senza ricaduta sul piano dell'apprendimento e della valutazione

Quando si attua una didattica laboratoriale l'attenzione si sposta molto di più sui processi e di conseguenza la costruzione delle prove di verifica degli apprendimenti richiede una maggiore sensibilità. Anche in questo ambito si è spinta la ricerca degli insegnanti, ma il problema resta ancora aperto, anche se si sono fatti piccoli ma significativi passi. Si è cercato di portare gli studenti a fare relazioni articolate sulle attività svolte, tenendo conto del linguaggio matematico, con le difficoltà che questo comporta, anche a causa della scarsa attenzione attribuita nella pratica didattica alla descrizione scritta ed esplicitazione di procedimenti risolutivi e di argomentazioni utili a sostenere una tesi.

Per le scuole si è trattato anche di un'ulteriore occasione per dotarsi di materiali da utilizzare in classe per dare agli studenti l'opportunità di pensare la matematica anche attraverso la manipolazione e l'interazione con oggetti concreti, cosa non sempre diffusa soprattutto nella scuola superiore. Inoltre il progetto ha permesso anche di realizzare artigianalmente prodotti che sul mercato non sono reperibili.

Il gruppo di docenti ha utilizzato una modalità di collaborazione a distanza servendosi della piattaforma per l'e-learning realizzata ad hoc dal servizio Didattica OnLine dell'Università di Trento. Così si sono facilitate la condivisione e archiviazione dei materiali prodotti, lo scambio di idee, l'apertura di discussioni sui temi via via trattati. Questo costituisce un'esperienza di interazione in gruppo che i docenti possono eventualmente riproporre alle proprie classi e per il Dipartimento di Matematica un momento di sperimentazione di modalità efficaci per interagire a distanza e in modo costruttivo con gruppi di insegnanti.

Vi sono però anche delle potenzialità insite nel progetto, visto come occasione innovativa di formazione, che non hanno potuto svilupparsi in pieno per varie ragioni

- la scuola difficilmente riesce a concepire un impegno dell'insegnante che vada oltre alle attività immediatamente finalizzate all'insegnamento, e quindi a pensare ad un'attività di ricerca - azione - formazione come ad un'attività istituzionale, che produce un valore aggiunto per la scuola stessa, che è opportuno sostenere e favorire;
- i tempi che la scuola lascia liberi ad un insegnante per svolgere queste attività di ricerca - azione sono quindi limitati a causa del sovrapporsi di altri impegni istituzionali;
- è difficile e richiede un grosso spreco di energie trovare date nelle quali collocare incontri tra insegnanti provenienti da diversi istituti;
- il coinvolgimento dei docenti universitari risente molto dello scarso riconoscimento riservato alle attività in collaborazione con le scuole per la formazione degli insegnanti e la ricerca didattica.

Queste ragioni portano anche a comprendere perché il coordinamento di un progetto così articolato e con un consistente numero di partner non abbia potuto essere portato avanti dalla scuola, ma abbia dovuto trovare il supporto esterno dell'IPRASE e del Dipartimento di Matematica.

Il Dipartimento di Matematica ha sostenuto anche in passato, e continua a sostenere, progetti di questo tipo perché costituiscono una significativa occasione di interazione con gli insegnanti e di arricchimento professionale per tutti i soggetti coinvolti. In particolare ritiene utile sostenere modalità di formazione che, come quella qui descritta, prendano avvio dalle aspettative degli insegnanti e che portino, con il dovuto accompagnamento, alla progettazione e sperimentazione di attività didattiche innovative con riscontri positivi tra gli studenti. Infatti il lavoro di ricerca sulla comunicazione della matematica e la sua didattica sarebbe fortemente sminuito se non ci fosse la possibilità di lavorare a contatto con insegnanti motivati e pronti a sperimentare e a confrontarsi.

Per esempio, parallelamente al progetto, il Dipartimento di Matematica ha realizzato il modulo formativo "Il laboratorio di matematica entra in classe. Problemi di massimo e di minimo", per organizzare in classe uno o più laboratori incentrati sul tema dell'ottimizzazione di forme geometriche. Ad esso hanno partecipato 20 docenti della scuola secondaria di secondo grado. questo progetto ha dato un contribuito al modulo formativo anche con il supporto di alcuni insegnanti che hanno sostenuto la fase di sperimentazione delle attività laboratoriali nella propria scuola.

Visto anche l'interesse mostrato dagli insegnanti che hanno partecipato al workshop conclusivo, è opportuno favorire e sostenere la sperimentazione di attività didattiche di questo tipo. Questo richiede un investimento mirato e stabile nel tempo sia da parte della scuola che degli enti che si occupano di formazione sul territorio. Il lavoro qui descritto, il coinvolgimento attivo degli insegnanti e il tempo investito stanno a dimostrare che nella scuola ci sono le energie e le competenze per realizzare nella didattica della matematica innovazioni efficaci.

Allegato 1 - Proprietà isoperimetrica e massimo di una funzione in due variabili

Proprietà isoperimetrica dei rettangoli vista come ricerca del massimo di una funzione in due variabili e rappresentazione con linee di livello in Derive

Area(x, y) := x·y

y = 14 - x

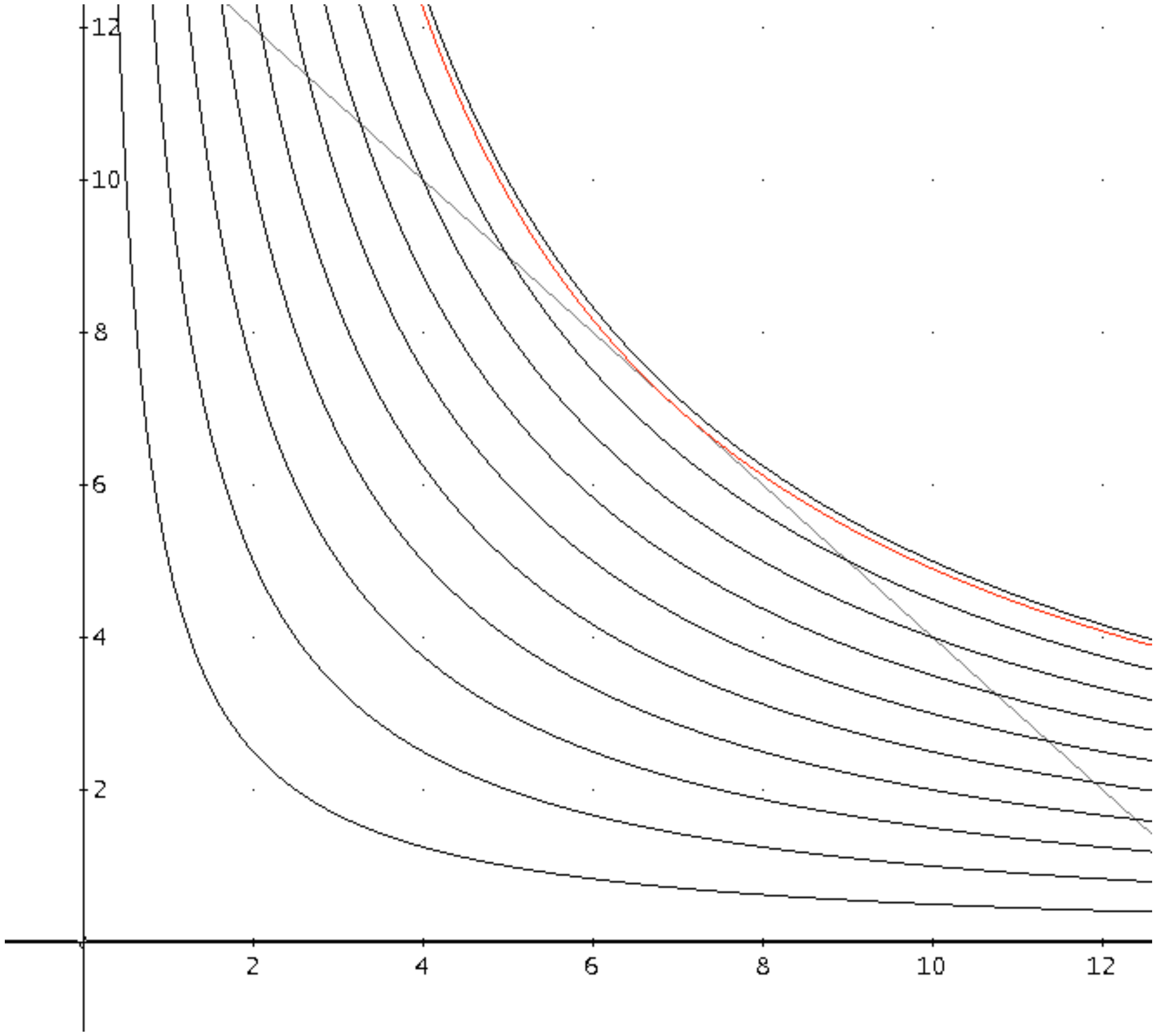
x·(14 - x)

$$\begin{bmatrix} \text{Area}(x,y) := x \cdot y \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{bmatrix}$$

VECTOR(x·y = k, k, 0, 50, 5)

[x·y = 0, x·y = 5, x·y = 10, x·y = 15, x·y = 20, x·y = 25, x·y = 30, x·y = 35, x·y = 40, x·y = 45, x·y = 50]

x·y = 49



Allegato 2 - Problemi vari su massimi e minimi

Proposte problemi per casa per Schede B

1. Trovare due numeri positivi la cui somma sia *s* e il cui prodotto sia massimo.
2. Due numeri positivi hanno come prodotto a^2. In quale caso è minima la loro somma?
3. In un quadrato di lato dato *l* inscrivere il quadrato di area massima.
4. Una figura è data dall'accostamento di due quadrati uno di lato x e uno di lato y. Verificare che al variare di x e y con x < y resta immutata la misura del perimetro e trovare la relazione tra i due affinché sia massima la superficie.
5. Tra tutti i rettangoli di diagonale fissata trovare quello di area massima.
6. Determinare il rettangolo di area massima inscritto in una semicirconferenza.
7. Dato un triangolo di perimetro fissato *1 cm* circoscritto ad una circonferenza trovare il raggio della circonferenza con valore massimo.
8. Trovare quando la gittata di un proiettile è massima sapendo che è stato sparato con una velocità vettoriale iniziale v_{0}..
9. In un grande serbatoio aperto, con pareti verticali, è contenuta dell'acqua fino ad una certa altezza H. Si pratica un foro in una della pareti ad una profondità h al di sotto del livello dell'acqua. Calcola la distanza massima dal piede della parete al punto in cui l'acqua colpisce il suolo.
10. Un agricoltore ha *p* metri di staccionata per chiudere un pascolo rettangolare adiacente ad un lungo muro di pietra. Quali sono le dimensioni del pascolo di area massima?
11. Di una grande sala rettangolare si conoscono le misure 50.0 ± 0.5 m e 30.0 ± 0.5 m ;
    A. verifica che l'errore compiuto sulla misura dell'area è pari ad un quarto del perimetro;
    B. dimostra che se gli errori sulle misure dei lati sono uguali, l'errore sull'area è comunque una percentuale del perimetro;
    C. con la misura di quale rettangolo ottieni l'errore assoluto minore?

Allegato 3 - Schede su problemi isoperimetrici e di area minima[12]

B1 Perimetro e area dei rettangoli

1. I due rettangoli di plexiglas hanno lo stesso perimetro.

   Se si indica con R l'area del rettangolo rosso e con B quella del rettangolo blu, secondo te quale delle seguenti affermazioni è vera?

   ☐ R > B

   ☐ B > R

   ☐ B = R

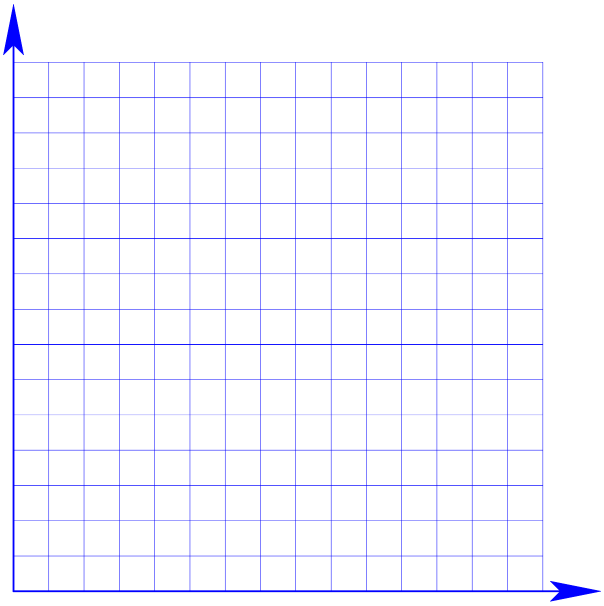
   Motiva la tua risposta.

   ____

   ____

   ____

2. Disegna sul foglio a quadretti tre diversi rettangoli di perimetro 28 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.
   Come sono disposti i tre vertici opposti all'origine?



[12] Schede di lavoro tratte dal testo in corso di stampa: **Luminati Domenico, Tamanini Italo** "Problemi di massimo e di minimo" Mimesis Edizioni 2009 Collana Quaderni di laboratorio.

3. Scegli ora un punto qualsiasi sul segmento con estremi nei punti di coordinate (14,0) e (0,14). Costruisci il rettangolo che ha un vertice in quel punto, un altro vertice nell'origine ed i lati paralleli agli assi.

   Quanto vale il perimetro di questo rettangolo?

4. Qual è il rettangolo di perimetro 28 che ha area massima? Motiva la tua risposta.

   In generale, fra tutti i rettangoli con perimetro fissato, qual è quello di area massima?

5. Disegna ora sul foglio a quadretti alcuni rettangoli di area 36 (quadretti), in modo che ognuno abbia un vertice nell'origine e due lati sui semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate.

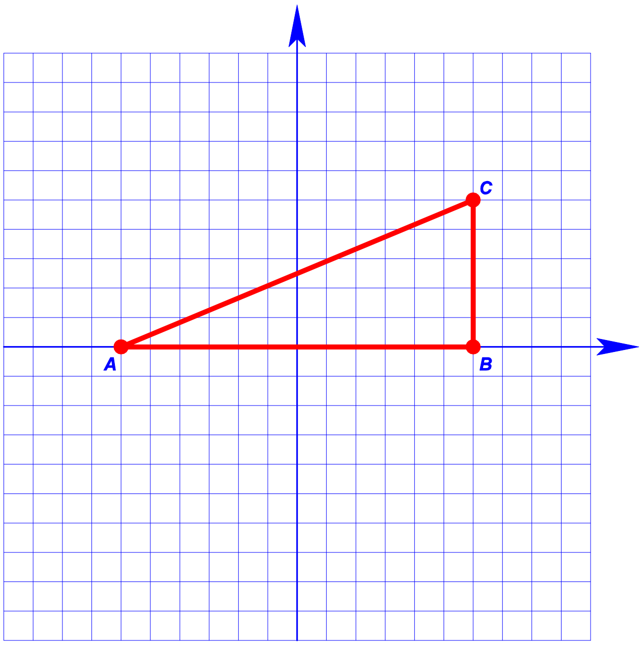
   Quale curva descrive il vertice opposto all'origine?

6. Qual è il rettangolo di area 36 che ha il minimo perimetro? Motiva la tua risposta.

   In generale, fra tutti i rettangoli di area fissata, qual è quello di perimetro minimo?

B2 Perimetro e area dei triangoli e dei poligoni

1. Il triangolo rettangolo *ABC* in figura ha base 12 e perimetro 30. Riesci a disegnare altri triangoli aventi la stessa base *AB* e lo stesso perimetro? Come potresti descriverli tutti? Puoi aiutarti con l'asticella con i pioli e la cordicella.
   Fra tutti i triangoli che puoi ottenere in questo modo, qual è quello di area maggiore?



____

____

2. Fra tutti i triangoli con lo stesso perimetro, qual è, secondo te, il triangolo con area massima?

   ____

   Motiva la tua risposta.

   ____

   ____

   ____

3. Disegna ora alcuni triangoli, tutti di area 15 e con la stessa base *AB* lunga 6. Come sono disposti i vertici opposti alla base?

   ____

   ____

Qual è, fra i triangoli che hanno queste caratteristiche, quello di perimetro minimo?

Motiva la tua risposta.

4. Fra tutti i triangoli con la stessa area, qual è, secondo te, il triangolo con perimetro minore?

Motiva la tua risposta.

5. Fra tutti i poligoni di perimetro fissato e aventi lo stesso numero di lati, qual è quello con area maggiore?

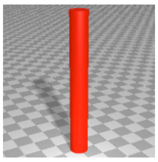
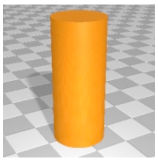
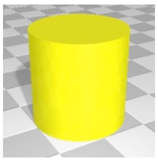
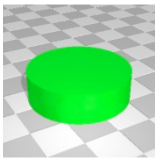
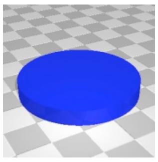
Motiva la tua risposta.

6. Fra tutte le figure piane con perimetro fissato, qual è quella di area maggiore?
Fra tutte le figure piane con area fissata, qual è quella di perimetro minore?

Motiva le risposte.

B3 Volume e area dei cilindri

1. Misura le dimensioni dei cilindri con gli strumenti a disposizione e compila la seguente tabella (ti consigliamo di esprimere i valori di area e volume nella forma $x\pi$):

	diametro (cm)	*altezza (cm)*	*area (cm^2)*	*volume (cm^3)*
 *cilindro rosso*				
 *cilindro arancio*				
 *cilindro giallo*				
 *cilindro verde*				
 *cilindro blu*				

Cosa ti suggerisce la tabella?

Fra questi cilindri, quale ha l'area esterna minore?

2. Considera ora un cilindro di volume 16π e raggio r e calcolane l'area della superficie esterna.

$$A(r) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. Fra **tutti** i cilindri aventi volume 16π, quale secondo te ha la minima area esterna? Ce n'è uno di area massima?

4. C'è un solido di volume 16π che ha area esterna ancora minore?

5. Fra **tutti** i solidi di volume fissato, quale sarà quello di area minima?

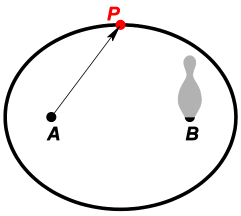
Fra **tutti** i solidi di area fissata, quale sarà quello di volume massimo?

Allegato 4 - Schede su Riflessioni e rimbalzi[13]

C1 Riflessioni e rimbalzi

Le figure delle prime tre domande rappresentano schematicamente il biliardino con cui effettuare gli esperimenti.

1. Immagina di colpire la pallina in *A*, indirizzandola verso *P*. Come pensi che avvenga il rimbalzo? Disegnalo.



La pallina riuscirà ad abbattere il birillo posto in *B*? Motiva la tua risposta.

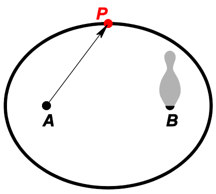
____

____

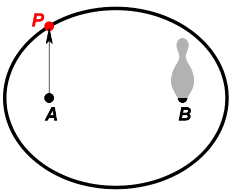
____

____

Dopo aver eseguito l'esperimento, riporta in figura la traiettoria del rimbalzo che hai osservato (solo il primo rimbalzo).



2. E se immagini di colpire la pallina indirizzandola verso il nuovo punto *P*, come pensi che avvenga il rimbalzo? Disegnalo.



La pallina riuscirà ad abbattere il birillo in *B*? Motiva la tua risposta.

____

____

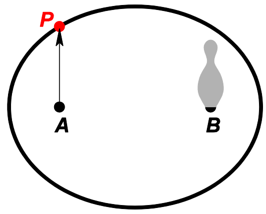
____

____

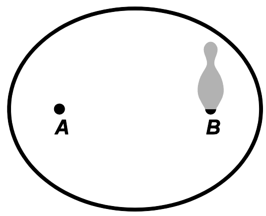
---

[13] Schede di lavoro tratte dal testo in corso di stampa: **Luminati Domenico, Tamanini Italo** "Problemi di massimo e di minimo" Mimesis Edizioni 2009 Collana Quaderni di laboratorio.

Dopo aver eseguito l'esperimento, riporta in figura la traiettoria del rimbalzo che hai osservato (solo il primo rimbalzo).



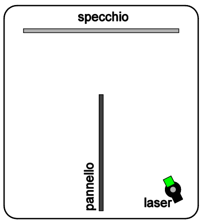
3. In quanti modi diversi pensi che si possa tirare la pallina da *A*, con l'obiettivo di colpire il birillo dopo un solo rimbalzo?

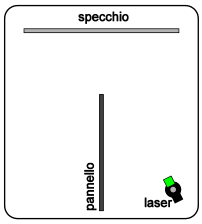


Motiva la tua risposta.

Esegui alcune prove con il biliardino e descrivi i risultati. Le tue congetture sono state confermate? Dopo queste prove, daresti ancora la stessa risposta alla domanda precedente?

4. Nelle seguenti figure è schematizzato l'apparato sperimentale a disposizione. In quale direzione bisogna orientare il laser per illuminare il bersaglio? Esegui alcuni esperimenti collocando il bersaglio in posizioni diverse e rappresentane schematicamente i risultati.





Quali caratteristiche geometriche presentano le traiettorie osservate?

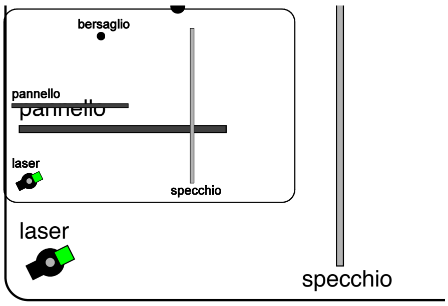
____

____

____

____

Nella situazione riportata in figura, sapresti tracciare con precisione la traiettoria del raggio luminoso che colpisce il bersaglio?



Come hai fatto per individuare il punto di riflessione? Motiva la tua risposta.

____

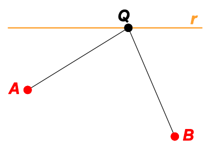
____

____

____

C2 Percorsi minimi

1. Nella figura che segue, sapresti individuare la traiettoria più breve che permette di andare da *A* a *B* "rimbalzando" sulla retta *r*?



Quali caratteristiche geometriche presenta? Motiva la tua risposta.

____

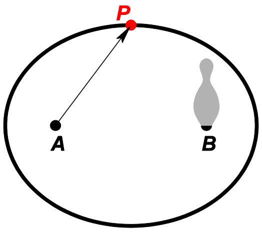
____

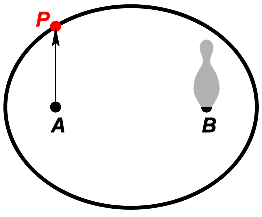
____

____

____

2. Nelle due figure che seguono, riesci a immaginare una sponda rettilinea (una retta passante per *P*) che produrrebbe lo stesso rimbalzo del biliardino? Prova a disegnarla.





Cosa puoi dire di queste due rette?

____

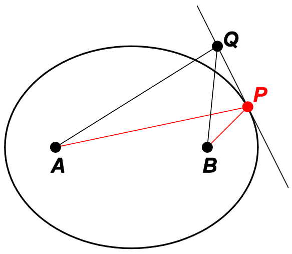
____

____

____

____

3. La figura che segue rappresenta un'ellisse avente fuochi nei punti *A* e *B*, insieme alla sua tangente in *P*.

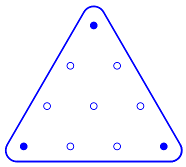


Fra tutti i percorsi che collegano A con B rimbalzando su r, come ad esempio AQB, il più corto è proprio APB. Sapresti dire perché?

4. A questo punto ti sarai già accorto che il biliardino degli esperimenti ha una forma ellittica e che la pallina e il birillo venivano posizionati nei suoi fuochi. Come si collegano i fenomeni osservati all'inizio con quanto appena dimostrato?

Allegato 5 - Schede su Reti minime[14]

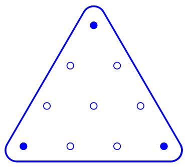
A1 Forze in equilibrio



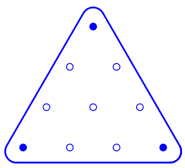
Le figure di questa scheda rappresentano schematicamente la lastra forata dell'apparato sperimentale. I punti anneriti indicano i tre fori in cui far passare le cordicelle.

1. Se si scelgono i fori come nella figura seguente, come si disporranno le cordicelle quando si appendono le tre masse alle loro estremità?

   Disegna la configurazione che ritieni sarà assunta dalle cordicelle.



Dopo aver eseguito l'esperimento, riporta nello schema qui sotto la configurazione che hai osservato.



Quali caratteristiche geometriche presenta?

____

____

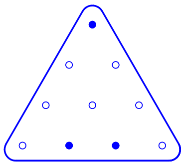
____

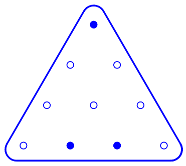
[14] Schede di lavoro tratte dal testo in corso di stampa: **Luminati Domenico, Tamanini Italo** "Problemi di massimo e di minimo" Mimesis Edizioni 2009 Collana Quaderni di laboratorio.

2. Come si disporranno le cordicelle se i fori sono scelti in modo diverso?

Per ciascuna delle situazioni che ti vengono proposte, rappresenta la tua congettura nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalle cordicelle.

a)

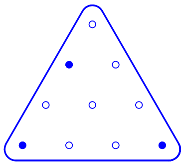


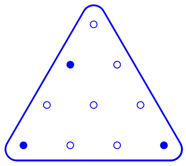


Riconosci delle analogie con il caso analizzato nel punto 1?

Ci sono anche delle differenze?

b)

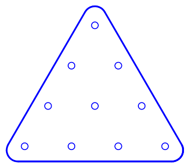


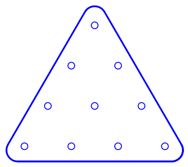


Riconosci delle analogie con i casi analizzati nei punti 1 e 2a?

Ci sono anche delle differenze?

3. Annerisci ora tre punti a tua scelta nella figura di sinistra e disegna quella che pensi essere la disposizione delle cordicelle. Utilizza l'apparato sperimentale per verificare la tua congettura e riporta nella figura di destra il risultato così ottenuto.





Hai notato qualche caratteristica geometrica ricorrente nelle configurazioni analizzate?

____

____

Se sì, come la potresti giustificare?

____

____

____

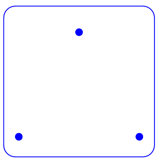
____

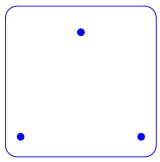
A2 Reti nel triangolo

1. Metti la lastrina nell'acqua saponata, tenendola verticalmente e facendo in modo che solo due dei tre pioli siano immersi. Se ora la estrai, si dovrebbe formare una lamina di sapone. Descrivi le sue caratteristiche geometriche.

2. Secondo te, quale forma avrà la lamina di sapone che si ottiene immergendo interamente la lastrina nell'acqua saponata?

   Rappresenta la tua congettura nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.

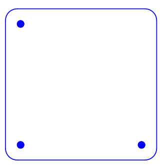




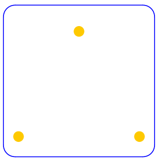
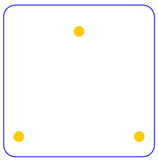
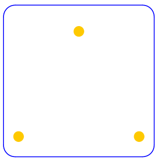
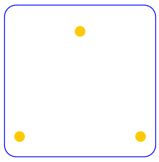
   Quali caratteristiche geometriche presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente?

3. Quale forma avrebbe la lamina se i tre pioli fossero posti nei vertici di un triangolo isoscele rettangolo?

   Disegna la configurazione che pensi sarà assunta dalla lamina di sapone.



4. Hai a disposizione quattro tessere, ciascuna delle quali rappresenta un possibile percorso (*rete*) che congiunge tre punti posti nei vertici di un triangolo equilatero. Metti in ordine le quattro reti secondo la loro lunghezza, poi disegnale nella tabella seguente dalla più lunga alla più corta e specifica la lunghezza sotto ciascuna di esse, utilizzando il lato del triangolo come unità di misura.

L = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________ *L* = ____________

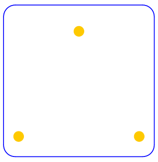
Quali caratteristiche geometriche presenta la rete più breve?

____

____

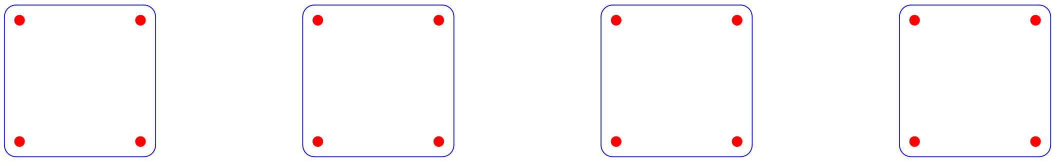
____

Pensi che i tre punti possano essere collegati da una rete ancora più breve? Se sì, disegnala.

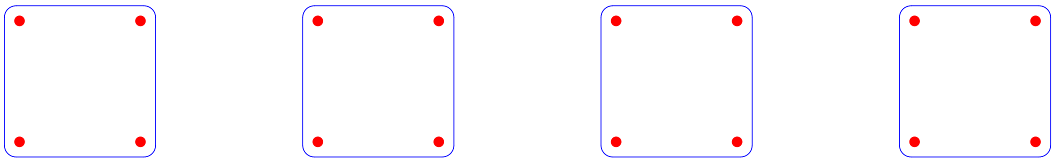


A3 Reti nel quadrato

1. Hai a disposizione otto tessere, ciascuna delle quali rappresenta un possibile percorso (*rete*) che congiunge quattro punti posti nei vertici di un quadrato. Metti in ordine le otto reti secondo la loro lunghezza, poi disegnale nella tabella seguente dalla più lunga alla più corta e specifica la lunghezza sotto ciascuna di esse, utilizzando il lato del quadrato come unità di misura.



$L =$ ____________ $L =$ ____________ $L =$ ____________ $L =$ ____________



$L =$ ____________ $L =$ ____________ $L =$ ____________ $L =$ ____________

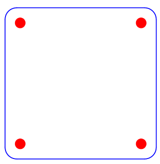
Quali caratteristiche geometriche presenta la rete più breve?

____

____

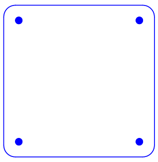
____

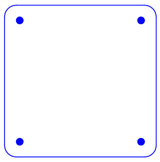
Pensi che i quattro punti possano essere collegati da una rete ancora più breve? Se sì, disegnala.



2. Secondo te, quale forma avrà la lamina di sapone che si ottiene immergendo interamente la lastrina con i quattro pioli nell'acqua saponata?

Rappresenta la tua congettura nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.





Quali caratteristiche geometriche presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente?

3. Riconosci delle analogie con la configurazione ottenuta con la lastrina triangolare?

Ci sono anche delle differenze?

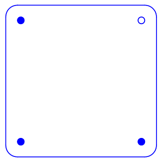
4. Verifica che la rete disegnata nella nuova tessera che ti è stata consegnata è più corta delle precedenti.

La sua lunghezza è L = ____________________ .

Secondo te, fra tutte le possibili reti che collegano i vertici del quadrato, ce n'è qualcuna ancora più corta? Cosa te lo fa pensare?

5. Riprendi la lastrina quadrata e prova ad immergere solo tre pioli nell'acqua saponata. In questo modo puoi verificare la correttezza della risposta che hai dato alla domanda 3 della scheda A2.

Disegna la configurazione ottenuta e riconosci analogie e differenze con la lamina descritta in precedenza nella scheda A2.

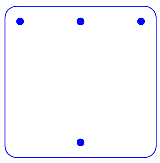


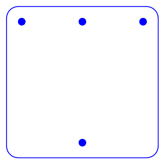
____

____

6. Secondo te, quale forma avrà la lamina di sapone che si ottiene immergendo interamente nell'acqua saponata la nuova lastrina con i pioli che disegnano una **T**?

Rappresenta la tua congettura nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalla lamina.





Quali caratteristiche geometriche presenta la configurazione ottenuta sperimentalmente?

____

____

Sommario