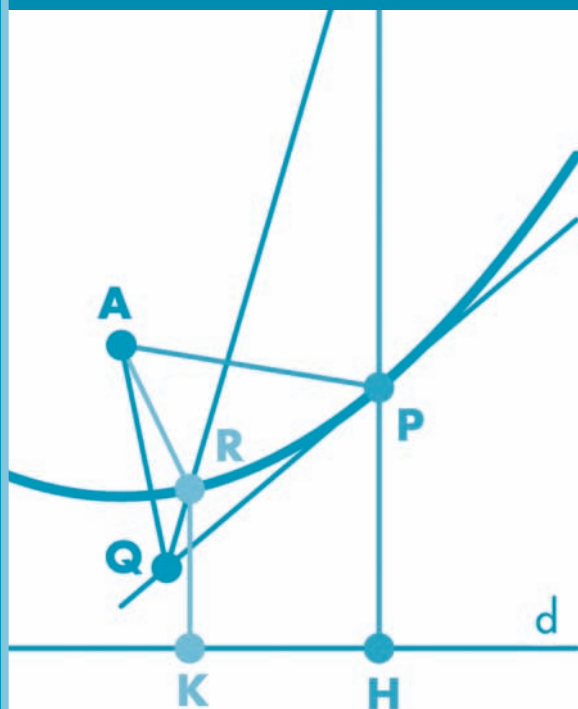


a cura di
Domenico Luminati
Lara Monfredini
Italo Tamanini
Chiara Tomaselli

PROBLEMI DI MASSIMO E DI MINIMO



BOZZA

Il materiale che qui proponiamo consente di organizzare in una classe uno o più laboratori incentrati sul tema dell'ottimizzazione di forme geometriche. Gli argomenti trattati riguardano le reti di lunghezza minima, il problema isoperimetrico e i fenomeni di riflessione di raggi luminosi e di rimbalzo di corpi elastici. Le attività proposte comprendono esperimenti, costruzioni di figure geometriche e simulazioni e animazioni interattive al computer, e sono accompagnate da approfondimenti teorici e da spunti per ulteriori ampliamenti.

Il materiale per gli esperimenti è costituito da apparati per lo studio di forze in equilibrio, da lastre per la realizzazione di lamine di sapone, da specchi piani e da biliardi ellittici, da serie di cilindri e di tessere con il disegno di particolari reti che si richiede di misurare e confrontare.

Gli *exhibit* sperimentali sono accompagnati da pannelli con immagini esplicative ed evocative, da schede per gli studenti contenenti quesiti e proposte di attività (tre schede sulle reti minime, tre schede sulla proprietà isoperimetrica e due schede sulla riflessione) e da questo quaderno per l'insegnante, contenente la descrizione dettagliata delle attività proposte, le loro finalità, l'indicazione delle soluzioni e ulteriori commenti, approfondimenti ed esercizi.

Questi laboratori nascono dalle attività che il Centro *matematita* svolge da tempo per affiancare l'insegnamento pre-universitario (<http://matematita.it/progetti/laboratori.php>) e sono stati in parte testati sia presso il Museo Tridentino di

Scienze Naturali, in occasione dell'allestimento della mostra *matetrentino*, sia nell'ambito de *La bottega del matematico*, un evento organizzato dall'Intendenza Scolastica Provinciale di Lingua Italiana di Bolzano, che ogni anno coinvolge per una settimana alcuni studenti delle scuole superiori.

I laboratori sono stati progettati per essere svolti mediamente in 10-12 ore e, a diverso livello di approfondimento, sono proponibili agli studenti di tutte le classi di una scuola superiore. Alla fine di questa introduzione si troveranno maggiori indicazioni su come organizzare le attività.

PERCHÉ I MASSIMI E I MINIMI?

I concetti di massimo e di minimo occupano un posto centrale in matematica e in generale nelle materie scientifiche, come ad esempio in fisica, dove le configurazioni di equilibrio di un dato sistema sono spesso descritte in termini di minima energia. Allo stesso modo, i problemi di ottimizzazione sono ampiamente diffusi nelle applicazioni scientifiche e tecnologiche, ad esempio nella progettazione di particolari strutture che devono offrire la massima resistenza a determinate sollecitazioni.

Naturalmente le conoscenze richieste per affrontare tali questioni si collocano spesso ben oltre il bagaglio che si può acquisire nel normale percorso scolastico, tuttavia riteniamo che sia possibile e anzi doveroso avvicinare gli studenti a questi temi fin dai primi anni della scuola superiore (se non addirittura prima, e comunque senza

aspettare di aver introdotto i metodi dell'analisi matematica e il calcolo con le derivate), proponendo problemi ambientati in un contesto geometrico tutto sommato familiare. Pensiamo che questa prassi debba essere incoraggiata, anche con l'obiettivo di rafforzare i legami fra geometria e calcolo, due modi complementari di guardare ai problemi, entrambi utili per la loro comprensione e risoluzione. Si potranno così consolidare concetti geometrici che non di rado restano evanescenti o confusi, mettendo contemporaneamente a frutto le varie tecniche di calcolo acquisite.

Non ultimo, il fatto che tali problematiche siano spesso strettamente collegate con la realtà fisica offre l'opportunità di far toccare con mano il processo di costruzione di un modello matematico idoneo a descrivere il fenomeno osservato, attraversando i passaggi cruciali di tale percorso, dalla sperimentazione e analisi dei dati raccolti alla sintesi dei risultati e alla loro conseguente verifica.

I CONTENUTI

I temi che abbiamo scelto di proporre sono tre: le reti minime, il problema isoperimetrico e la riflessione dei raggi luminosi.

Molto schematicamente, una *rete* non è altro che un modo di collegare fra loro un certo numero di punti, usando delle linee che si possono diramare anche da punti diversi da quelli fissati. Si tratta poi di determinare, fra tutti i possibili collegamenti, quello (o quelli) di lunghezza complessiva minore (*rete minima*). Nelle esperienze proposte

si potrà osservare il tipico fenomeno della formazione di angoli di 120° nei punti di diramazione delle reti minime, proprietà che potrà essere dimostrata nell'ambito del modello teorico.

Il classico *problema isoperimetrico* chiede invece di determinare, fra tutte le figure piane di perimetro fissato, quella di area maggiore o, simmetricamente, fra tutte le figure di area fissata, quella di perimetro minore. Tale problema può evidentemente essere riformulato anche per figure tridimensionali e in tutti i casi la forma migliore è la "più tonda" possibile – il cerchio nel piano e la sfera nello spazio. Affrontare questo problema nella sua generalità è assai laborioso; se però ci si restringe a particolari classi di figure, si riescono a proporre varie attività che permettono di studiarne alcuni aspetti e di comprenderne le caratteristiche essenziali.

Anche le leggi della riflessione e della rifrazione della luce possono essere dedotte da un principio di minimo tempo. Le esperienze e gli approfondimenti proposti intendono far emergere le caratteristiche geometriche delle traiettorie dei raggi luminosi, inquadrandole all'interno di una teoria generale. In questo laboratorio si avrà anche modo di sperimentare la proprietà di riflessione dell'ellisse, ritrovandola poi (con quella delle altre coniche) nel modello matematico.

GLI OBIETTIVI E I METODI

Le attività proposte mirano a costruire un ventaglio di esperienze relative ad alcuni temi significativi, che vengono dapprima esplorati da punti

di vista diversi e successivamente interpretati secondo schemi unitari, per essere in seguito approfonditi sotto l'aspetto teorico. Si partirà dall'osservazione di particolari fenomeni per arrivare alla loro modellizzazione, costruendo nel corso delle attività nuovi concetti e recuperando le tecniche utili per la successiva trattazione. Semplici schemi geometrici saranno scelti per rappresentare le varie situazioni sperimentali e, fra le forme in gioco, si dovranno trovare le "migliori", quelle cioè che rispondono a determinati criteri di ottimalità: ad esempio, le reti di lunghezza minima che collegano alcuni punti fissati, le figure di pari perimetro e di area massima, e così via.

Il materiale è organizzato in schede di laboratorio pensate per piccoli gruppi di 4-5 ragazzi, in modo da favorire un atteggiamento attivo di esplorazione e di riflessione sui problemi proposti, l'interscambio delle idee e delle scoperte e la discussione degli eventuali errori.

Ogni scheda è sostanzialmente autosufficiente e tutte sono raccolte e commentate in un'ampia presentazione per l'insegnante, comprendente soluzioni e spunti per ulteriori approfondimenti. Tutte le attività proposte comprendono una fase di sperimentazione (osservazione e descrizione di fenomeni) e una fase di riflessione e inquadramento teorico. Entrambe le fasi hanno a nostro avviso pari importanza e riteniamo fondamentale che gli studenti abbiano a disposizione il tempo necessario alla loro completa attuazione. Sarà cura dell'insegnante, sulla base delle esi-

genze della classe, dei gruppi di lavoro o dei singoli studenti, selezionare all'interno di questa proposta le esperienze da svolgere effettivamente e valutare il tempo da dedicare a ciascuna di esse. Varie indicazioni a tale proposito si potranno trovare nelle pagine dedicate alla presentazione dettagliata delle attività.

IL MATERIALE A DISPOSIZIONE

Il *kit* che presentiamo con questo quaderno comprende:

- una copia plastificata di tutte le schede di laboratorio;
- tre pannelli con immagini relative ai tre temi trattati;
- un apparato con tre fili e tre masse per esperimenti sull'equilibrio di forze (vedi scheda A1);
- 5 serie di 3 lastrine, un anello metallico con filo, cannucce e recipienti in plastica per esperimenti con le lamine di sapone (vedi schede A2, A3 e Complementi alla sezione B);
- 5 serie di 13 tessere con il disegno di alcune reti che congiungono tre o quattro punti (vedi schede A2 e A3);
- 5 serie di 2 rettangoli di plexiglas (vedi scheda B1);
- 5 dispositivi per disegnare ellissi (vedi scheda B2);
- 1 cinturino metallico e biglie di vetro per un'esperienza sulla proprietà isoperimetrica del cerchio (vedi scheda B2);

- 5 serie di 5 cilindri diversi aventi lo stesso volume (vedi scheda B3);
- un piccolo biliardo ellittico per esperienze sulla proprietà focale dell'ellisse (vedi schede C1 e C2);
- un dispositivo laser per esperimenti sulla riflessione in uno specchio piano (vedi scheda C1);
- calibri, righelli, goniometri e indicatori di angoli a 120° ;
- un primo CD (CD1 - *materiali*) che a sua volta comprende:
 - le schede di laboratorio ed altri materiali da stampare e distribuire ai ragazzi;
 - le istruzioni d'uso per tutti gli apparati del kit;
 - l'elenco di tutto il materiale;
- un secondo CD (CD2 - *animazioni*) che a sua volta comprende:
 - alcune animazioni interattive e filmati ad integrazione delle esperienze proposte.

ORGANIZZAZIONE E TEMPI

Le schede di laboratorio sono così organizzate:

A Reti minime

- A1 Forze in equilibrio
- A2 Reti nel triangolo
- A3 Reti nel quadrato

B Proprietà isoperimetrica

- B1 Perimetro e area dei rettangoli
- B2 Perimetro e area dei triangoli e dei poligoni
- B3 Volume e area dei cilindri

C Riflessione

- C1 Riflessioni e rimbalzi
- C2 Percorsi minimi

Ogni insegnante può naturalmente ritagliare il proprio percorso, a seconda dei propri interessi, della classe a cui lo presenta, del tempo che intende utilizzare. Diamo qui di seguito qualche suggerimento.

Le attività proposte nelle schede del gruppo A riguardano le reti di lunghezza minima che collegano alcuni punti assegnati nel piano. Sugeriamo di dedicare due ore consecutive alla parte sperimentale descritta nelle schede A1, A2, A3 e altre due ore alla riflessione sull'attività svolta e all'approfondimento dei risultati ottenuti. Per ottimizzare i tempi, suggeriamo di svolgere le attività sperimentali, che comportano anche l'uso di acqua saponata, in un'aula di laboratorio, dove sarà stato preventivamente allestito il materiale.

Le attività proposte nelle schede del gruppo B si riferiscono a problemi di massimo e di minimo riguardanti perimetro, area e volume di figure geometriche nel piano e nello spazio. Sugeriamo di suddividere le attività in due incontri indicativamente di due ore ciascuno e da svolgersi in una normale aula scolastica. Il primo incontro sarà dedicato al problema isoperimetrico nel piano (schede B1 e B2, o anche una sola delle due), il secondo all'analogo problema nello spazio (scheda B3).

Le attività proposte nelle schede del gruppo C riguardano l'interpretazione matematica di feno-

meni di riflessione di raggi luminosi e di rimbalzo di corpi elastici. Sugeriamo di dedicare un'ora alla fase sperimentale (delineata nella scheda C1), da svolgersi in un'aula normale o, anche per ottimizzare i tempi, in un'aula di laboratorio. Un'altra ora, o forse due, sarà successivamente dedicata all'inquadrimento teorico, seguendo le linee esposte nella scheda C2.

Questa proposta di organizzazione temporale delle attività è puramente indicativa e, come precedentemente sottolineato, dovrà essere adeguatamente calibrata dall'insegnante, utilizzando allo scopo anche i suggerimenti proposti nel seguito.

Il materiale, sicuramente adatto per un triennio di scuola secondaria superiore, è stato organizzato cercando, per quanto possibile, di renderlo utilizzabile anche nel biennio, proponendo una varietà di argomentazioni fondate su tecniche dimostrative diverse e adeguate al livello delle conoscenze delle varie classi.

Per finire, vi invitiamo a utilizzare il forum a questo indirizzo <http://www.matematita.it/forum> per segnalare tutte le osservazioni e i commenti che si ritengono necessari. Il forum potrà essere un utile strumento di confronto tra gli utilizzatori di questo *kit*.

DESCRIZIONE SOMMARIA

Le attività proposte in questo gruppo di schede riguardano le reti di lunghezza minima che collegano alcuni punti assegnati nel piano.

Molto schematicamente, una *rete* non è altro che un modo di collegare fra loro un certo numero di punti, usando delle linee che si possono diramare anche da punti diversi da quelli fissati. Il problema consiste quindi nel determinare, fra tutti i possibili collegamenti, quello (o quelli) di lunghezza complessiva minore (*rete minima*).

Si può immaginare, ad esempio, di dover progettare un sistema di strade (o di tubazioni, o di cavi elettrici, ecc...) che collega un certo numero di città in modo che, partendo da una qualsiasi, si possa raggiungere ogni altra città, e di volerlo fare risparmiando sul costo totale, costo che si suppone proporzionale alla lunghezza dell'intero percorso.

È evidente che la linea più breve che collega due punti è il segmento, come è evidente che ogni rete minima è costituita da tratti rettilinei. Non è tuttavia altrettanto semplice intuire quale sia la rete di lunghezza minima che collega tre o quattro punti, anche se sono situati nei vertici di un triangolo equilatero o di un quadrato; men che meno quando i punti fissati sono più numerosi e la loro disposizione è meno regolare. Gli esperimenti proposti intendono far emergere le proprietà geometriche fondamentali delle soluzioni

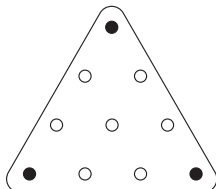
di questo problema. Di tali proprietà si forniscono inoltre le dimostrazioni, usando soltanto i normali strumenti della matematica in possesso degli studenti di scuola superiore.

Suggeriamo di suddividere in due fasi l'attività complessiva. La prima fase, puramente sperimentale, potrebbe essere svolta indicativamente in due ore consecutive; per ottimizzare i tempi e dedicare le intere due ore allo svolgimento degli esperimenti, suggeriamo di svolgere questa parte delle attività in un'aula di laboratorio, dove sarà stato preventivamente allestito il materiale. Le esperienze proposte in questa prima fase, descritte nelle tre schede A1, A2, A3, riguardano:

- un problema di equilibrio di tre forze;
- le configurazioni di equilibrio stabile di particolari lamine di sapone;
- il confronto diretto della lunghezza di alcune reti.

Riteniamo opportuno che queste due ore iniziali siano dedicate esclusivamente all'osservazione e alla descrizione dei fenomeni e non al loro inquadramento teorico.

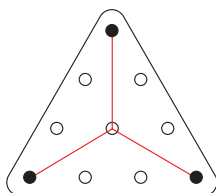
Altre due ore o più, in aula, saranno successivamente dedicate alla riflessione sull'attività svolta e all'approfondimento dei risultati ottenuti, con l'obiettivo di interpretare i fenomeni osservati in termini di reti minime e di costruire su questa base un modello teorico unitario. Le linee guida di questa rielaborazione particolarmente importante sono espone nella sezione **Inquadramento teorico e approfondimenti**. Altri problemi, rac-



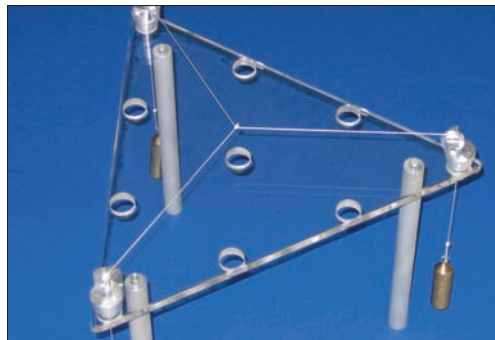
Gli studenti, eventualmente indirizzati dall'insegnante, dovrebbero osservare che i fori sono nei vertici di un triangolo equilatero e che le masse utilizzate sono uguali. La simmetria del sistema dovrebbe quindi suggerire la risposta corretta: data per buona l'unicità della soluzione, questa sarà caratterizzata dal maggior numero di assi di simmetria. Infatti, se una soluzione non avesse tutta la simmetria del triangolo equilatero, se ne potrebbero facilmente trovare delle altre.

Dopo aver eseguito l'esperimento, riporta nello schema qui sotto la configurazione che hai osservato.

Quali caratteristiche geometriche presenta?



Gli studenti dovrebbero osservare che le cordicelle formano angoli uguali (e verificarlo con gli appositi indicatori) e che la configurazione presenta tre assi di simmetria. Potranno inoltre osservare che la rete è composta da tre segmenti di uguale lun-

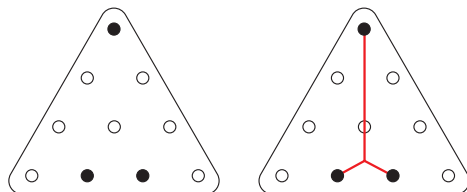


ghezza che si diramano dal centro del triangolo.

2. Come si disporranno le cordicelle se i fori sono scelti in modo diverso?

Per ciascuna delle situazioni che ti vengono proposte, rappresenta la tua congettura nella figura di sinistra, esegui l'esperimento e riporta nella figura di destra la configurazione assunta dalle cordicelle.

a.



PROPRIETÀ ISOPERIMETRICA

BOZZA

DESCRIZIONE SOMMARIA

Le attività proposte in questo gruppo di schede si riferiscono a problemi di massimo e di minimo riguardanti perimetro, area e volume di figure geometriche nel piano e nello spazio.

Un classico problema in quest'ambito è il cosiddetto *problema isoperimetrico*:

- *fra tutte le figure piane di perimetro fissato, quale ha l'area maggiore?*
- *fra tutti i solidi aventi la stessa area esterna, quale ha il volume maggiore?*

In entrambi i casi la forma migliore è "la più tonda possibile" – il cerchio nel piano e la sfera nello spazio – come è forse naturale rispondere sulla base dell'intuizione e dell'esperienza quotidiana (se si riempie o si gonfia un sacchetto, questo tende ad arrotondarsi). Tuttavia è assai laborioso affrontare la questione, nella sua generalità, dal punto di vista matematico. Se però ci si restringe a particolari classi di figure, il problema diventa più accessibile e si può affrontare anche con le tecniche normalmente acquisite nella scuola superiore. Si possono così proporre attività varie e interessanti, che permettono di studiarne alcuni aspetti e di coglierne le caratteristiche essenziali.

Assieme al problema isoperimetrico, si studierà anche il suo *problema duale*:

- *a parità di area, quale figura piana ha perimetro minimo?*

- *a parità di volume, quale solido ha la minima area esterna?*

Ci si potrà rendere conto che le soluzioni dei due problemi sono le stesse e si cercherà di illustrarne i motivi.

Suggeriamo di suddividere l'attività complessiva in due parti, che possono essere svolte in una normale aula, indicativamente in due ore ciascuna. Nella prima verranno proposte esperienze nell'ambito della geometria piana, relative al problema isoperimetrico nella classe dei rettangoli, dei triangoli e dei poligoni (schede B1 e B2). A seconda del livello della classe e del tempo a disposizione, questa prima parte delle attività potrebbe anche limitarsi allo svolgimento della scheda B1 (relativa ai rettangoli) e del quesito 6 della scheda B2 (che riguarda la proprietà isoperimetrica del cerchio) oppure, in alternativa, alla sola scheda B2 (relativa ai triangoli, ai poligoni e al cerchio).

La seconda parte riguarderà il problema duale nell'ambito dei cilindri; se il tempo impiegato per tale esperienza fosse inferiore alle due ore, si suggerisce di arricchire l'attività con un approfondimento sul chilogrammo campione, con l'animazione *Verso la sfera* contenuta nel CD2, oppure con esperimenti sulle bolle di sapone (illustrati nei **Complementi**). Si potrà anche introdurre la questione della dualità, raccontando l'equivalenza fra il problema isoperimetrico e il problema duale.

qual è quella di perimetro minore?
Motiva le risposte.

La risposta corretta – il cerchio – dovrebbe essere facilmente intuita. Utilizzando il cinturino e le biglie a disposizione, l'insegnante mostra alla classe che la forma isoperimetrica di area massima è circolare: tale forma consente di far stare il maggior numero di palline dentro il cinturino flessibile di lunghezza fissata.

A volte la cinta muraria delle antiche città – ad esempio Monteriggioni – ha una forma approssimativamente circolare, come dovrebbe teoricamente essere al fine di racchiudere il massimo spazio per lo sviluppo urbano nel modo meglio difendibile, ossia rendendo minima la parte esposta a possibili aggressioni esterne.

A conclusione di questa parte, l'insegnante può mostrare le animazioni *Verso i poligoni regolari e Arrotondando...* (contenute nel CD2-materiali) ed eventualmente illustrare la dualità fra il problema a perimetro fissato e quello ad area fissata.



B3 AREA E VOLUME DEI CILINDRI

Ogni gruppo ha a disposizione una serie di 5 cilindri diversi, ma tutti (approssimativamente) dello stesso volume, e degli strumenti per misurarli (calibri), che vengono subito distribuiti agli studenti.

1. Misura le dimensioni dei cilindri con gli strumenti a disposizione e compila la seguente tabella (ti consigliamo di esprimere i valori di area e volume nella forma $x\pi$):

DESCRIZIONE SOMMARIA

L'attività proposta in questo gruppo di schede riguarda l'interpretazione matematica di fenomeni di riflessione di raggi luminosi e di rimbalzo di corpi elastici.

È ben noto che molte leggi della Fisica possono essere dedotte da opportuni "principi di minimo" (minima energia, minima azione,...). Questo è vero anche per le fondamentali leggi dell'ottica geometrica, che si possono far discendere dal principio di Fermat (XVII secolo), secondo il quale i raggi luminosi percorrono cammini di tempo minimo. In verità, si attribuisce già ad Erone (I sec. d.C.) la prima interpretazione del fenomeno della riflessione in termini di cammini di minima lunghezza.

Gli esperimenti proposti nella prima scheda intendono far emergere sia le proprietà geometriche fondamentali dei raggi riflessi e delle traiettorie negli urti elastici (uguaglianza degli angoli di incidenza e di riflessione), sia la proprietà focale dell'ellisse. I fenomeni osservati saranno successivamente inquadrati in un modello fisico-matematico, all'interno del quale tali proprietà saranno effettivamente dedotte in maniera elementare. Per questo sarà d'aiuto la traccia esposta nella seconda scheda.

Di conseguenza suggeriamo di suddividere in due fasi l'attività complessiva. La prima fase, puramente sperimentale, potrebbe essere svolta indi-

cativamente in un'ora. Le esperienze qui proposte sono descritte nella scheda C1 e riguardano:

- i rimbalzi in un biliardo ellittico;
- la riflessione di raggi luminosi in uno specchio piano.

Riteniamo opportuno che questa prima ora sia dedicata esclusivamente all'osservazione e alla descrizione dei fenomeni e non al loro inquadramento teorico.

Un'altra ora, o forse due, sarà successivamente dedicata a ripensare l'attività sperimentale, con l'obiettivo di interpretare i fenomeni osservati in termini di *cammini di lunghezza minima*. Questa rielaborazione particolarmente importante potrà essere svolta seguendo le linee esposte nella scheda C2. Ulteriori approfondimenti, fra i quali compare la trattazione del fenomeno della rifrazione, e nuovi problemi sono raccolti nella sezione **Complementi** e potranno eventualmente essere affrontati in questa seconda fase, avendo tempo da dedicarvi.

MATERIALE A DISPOSIZIONE

- un piccolo biliardo ellittico, palline e birilli;
- un apparato per esperimenti sulla riflessione in uno specchio piano;

e inoltre:

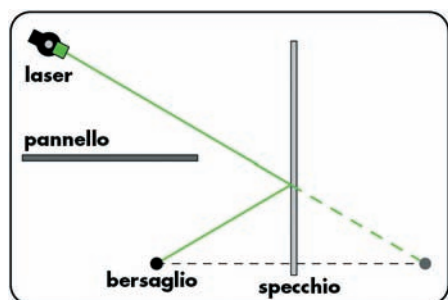
- schede per gli studenti;
- goniometri.

QUADRO TEORICO

Un raggio luminoso che si riflette in uno specchio piano forma un angolo di incidenza uguale al-

Gli studenti probabilmente già conoscono la legge di riflessione e dovrebbero comunque osservare, aiutandosi anche con il goniometro a disposizione, che gli angoli di incidenza e di riflessione (misurati rispetto alla normale) sono uguali. Naturalmente i disegni potranno risultare imprecisi, in quanto può non essere subito chiaro dove collocare il punto di riflessione. Questo è oggetto della prossima esperienza.

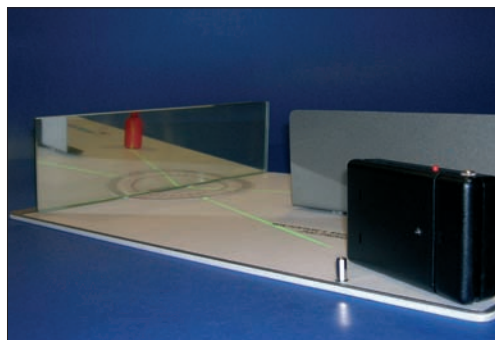
Nella situazione riportata in figura, sapresti tracciare con precisione la traiettoria del raggio luminoso che colpisce il bersaglio?



Come hai fatto per individuare il punto di riflessione? Motiva la tua risposta.

Per determinare il punto di riflessione, basta riflettere il punto che indica il bersaglio nella retta corrispondente allo specchio e quindi congiungere il laser con il bersaglio riflesso. Il punto cercato è proprio l'intersezione di questo segmento con lo specchio. Se si guarda nello specchio mentre si orienta il raggio, si vede che il raggio

riflesso colpisce il bersaglio esattamente quando la sua immagine nello specchio (che prolunga in linea retta il tratto iniziale del raggio) colpisce l'immagine del bersaglio. Sugeriamo all'insegnante di far eseguire questa semplice esperienza, che contiene in sé l'idea della costruzione geometrica la quale, come si vedrà, è anche alla base della dimostrazione di Erone.



Conclusa la prima fase dedicata alla sperimentazione, si passa alla costruzione di un quadro teorico per la descrizione dei fenomeni osservati. A tal fine l'insegnante potrà avvalersi delle immagini del pannello *Riflettendo* e della traccia delineata nella prossima scheda. È opportuno che le risposte ai quesiti proposti, benché rivolti al singolo studente, nascano da una discussione comune, mediata ed indirizzata dall'intervento del docente. È anche opportuno che la nuova scheda C2 sia consegnata solo ora, all'inizio della nuova attività, dato che alcune figure potrebbero suggerire le risposte ai quesiti della scheda C1.