Proposta di laboratorio sulle trecce

Le trecce sono da sempre conosciute e usate come decorazioni. Ma esse sono state anche formalizzate come oggetti matematici: la teoria delle trecce è un campo di ricerca molto attivo, che ha svariate applicazioni, ad esempio nella fisica, nella biologia, nella robotica e nella teoria dei nodi.

In questo laboratorio si vuole far scoprire i concetti fondamentali dei gruppi delle trecce e descrivere l'azione delle trecce su cordicelle chiuse poste attorno ai fili della treccia (curve nel gruppo fondamentale del piano meno alcuni punti).

Queste note descrivono sommariamente gli obbiettivi del laboratorio e, un po' più in dettaglio, i contenuti.

Obbiettivi del laboratorio

Il principale problema posto, cioè trovare una curva che dia una curva data sotto l'azione di una treccia data, richiede di costruire tutte le nozioni necessarie alla formalizzazione del problema: alla sua formulazione in linguaggio matematico e alla sua risoluzione.

In questo modo vengono introdotti alcuni problemi e concetti tipici della topologia: deformazioni continue (isotopie), confronto "qualitativo" tra oggetti topologici. Due trecce infatti vengono considerate "uguali" se hanno i fili intrecciati allo stesso modo, mentre non ci interessa dove esattamente passino i fili, cioè la loro equazione.

Si vuole anche mostrare che dietro oggetti comuni, come cordicelle intrecciate, si possano nascondere concetti matematici profondi, dando così un esempio di costruzione di oggetti e teorie matematiche a partire dall'osservazione di oggetti e fenomeni concreti.

La formalizzazione del problema, topologico, richiede di usare strumenti propri di un altro campo, l'algebra. Questo accade spesso in matematica: un problema in un campo viene spesso formalizzato e risolto usando strumenti di natura completamente diversa, propri di un altro campo.

Il laboratorio proposto permette di assimilare o ricordare il concetto di gruppo, forse già conosciuto in modo intuitivo da alcuni degli studenti, che incontrano i gruppi numerici e i gruppi di isometrie nel piano. Si evidenzia quindi l'importanza di trovare e definire strutture matematiche negli oggetti concreti. Si possono inoltre indagare alcuni aspetti della teoria dei gruppi: ad esempio la non commutatività e l'azione di gruppo su un insieme.

Inoltre si sperimenta in prima persona il metodo scientifico: si parte dall'osservazione di fenomeni fisici, si fanno esperimenti, si cerca una descrizione in linguaggio formale, si elabora una teoria per poter fare previsioni sui fenomeni e infine si verifica sperimentalmente se le previsioni fatte con il modello teorico corrispondono a quanto accade.

Descrizione dell'argomento

Trecce

In matematica una treccia è la formalizzazione dell'oggetto fisico: una collezione di fili, le cui estremità sono fissate su dei piani orizzontali, che scorrono dall'alto verso il basso e che non possono mai intersecarsi. In modo più formale, fissati n punti in un piano e gli stessi punti in un piano parallelo al primo, una treccia è una collezione di curve disgiunte nello spazio tra i due piani, scelte in modo che ogni piano compreso tra i due piani fissati e ad essi parallelo intersechi ogni curva esattamente in un punto (figura 1).

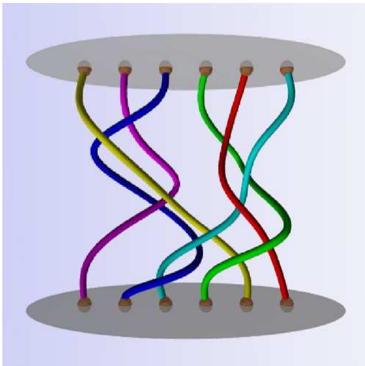

Figura 1: Una treccia a sei fili.

Per descrivere le trecce, vogliamo tenere conto solo di come i fili sono intrecciati tra loro e non della loro struttura geometrica rigida. Due trecce sono quindi considerate uguali, o più precisamente equivalenti, se si può deformare una nell'altra con continuità, in modo che ad ogni istante della deformazione l'oggetto rimanga una treccia con gli stessi punti di partenza e di arrivo. In topologia queste deformazioni sono dette isotopie.

Due trecce con lo stesso numero di fili possono essere composte, cioè si può mettere una dopo l'altra facendo combaciare le estremità inferiori dei fili della prima con le estremità superiori dei fili della seconda. Si ottiene così una nuova treccia, che è la composizione delle due trecce di partenza (figura 2). Scriveremo $T * S$, o più semplicemente TS, la composizione di due trecce T ed S.

Questa appena descritta è un'operazione sulle trecce con un numero n fissato di fili. Si verifica facilmente che è associativa e che ha per elemento neutro la treccia banale 1, dove tutti i fili sono dritti. Data una treccia, si può quindi cercarne l'inversa, cioè una treccia che, composta a quella di partenza, dia come risultato la treccia banale. È abbastanza semplice accorgersi che, per ottenere l'inversa di una treccia, basta rifletterla in uno specchio orizzontale.

Abbiamo quindi dato all'insieme delle trecce la struttura di gruppo: un insieme con un'operazione binaria associativa, che abbia un elemento neutro e in cui ogni elemento ha un inverso.

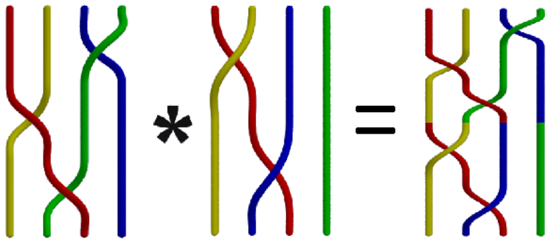

Figura 2: La composizione di due trecce.

Un modo per descrivere le trecce è il seguente: ordiniamo i punti di partenza e di arrivo delle curve. Consideriamo solo incroci che avvengono tra fili adiacenti, cioè quelle situazioni in cui un filo passa davanti a quello immediatamente a destra o a sinistra. Questa limitazione non è restrittiva: se un incrocio avviene tra fili distanti, può essere scomposto in più incroci tra fili adiacenti. Anche gli incroci tra tre o più fili possono essere semplificati, muovendo leggermente i fili tramite un'isotopia. Possiamo inoltre supporre che gli incroci avvengano tutti ad altezze diverse, perché in caso contrario possiamo spostare uno degli incroci verso l'alto o verso il basso tramite un'isotopia.

I mattoni per costruire le trecce sono quindi le trecce elementari, in cui tutti i fili sono dritti, tranne due che si scambiano di posizione in un incrocio. Se in una treccia elementare il filo di sinistra passa dietro a quello di destra, l'incrocio è detto positivo: σ_i è la treccia in cui il filo in posizione i passa dietro al filo in posizione $i+1$. In un incrocio negativo il filo di sinistra passa invece davanti a quello di destra: σ_i^{-1} è la treccia in cui il filo in posizione i passa davanti al filo in posizione $i+1$ (figura 3). La treccia σ_i^{-1} è chiamata così proprio perché è l'inversa di σ_i.

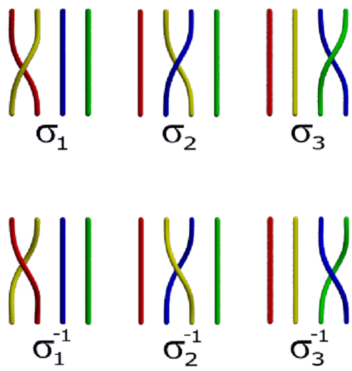

Figura 3: Le trecce elementari: i generatori del gruppo treccia a quattro fili e i loro inversi.

Si può dimostrare che ogni treccia è la composizione di un numero finito di σ_i e σ_i^{-1}: in termini matematici, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}$ sono i generatori del gruppo delle trecce con n fili. Una treccia sarà quindi rappresentata da una parola nell'alfabeto delle lettere σ_i e σ_i^{-1}, ad esempio $\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2$.

Trovare l'inversa di una treccia usando le parole è molto semplice: basta leggere la parola al contrario e cambiare tutti gli esponenti. Ad esempio, l'inversa di $\sigma_3^{-1}\sigma_1\sigma_2$ sarà $\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_3$.

Si osserva poi che la composizione non è commutativa; ad esempio componendo le due trecce σ_1 e σ_2, si ottengono due trecce, a seconda dell'ordine scelto per la composizione: $\sigma_1\sigma_2$ e $\sigma_2\sigma_1$, come illustrato in figura 4. Ci si può

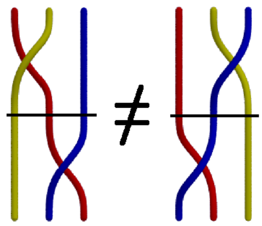

Figura 4: La composizione di trecce non è commutativa.

accorgere che queste due trecce sono diverse guardando dove va a finire il primo filo a sinistra: nel primo caso finisce a destra, mentre nel secondo arriva in centro. Quindi le due trecce non sono la stessa, perché non si può deformare una nell'altra mantenendo gli estremi fissati.

In termini più formali, ogni treccia induce una permutazione, che corrisponde all'ordine in cui i fili arrivano sul piano in basso. La permutazione associata a una treccia è un invariante: trecce equivalenti inducono la stessa permutazione e quindi se due trecce inducono permutazioni diverse, sono sicuramente trecce diverse (ma anche trecce diverse possono indurre la stessa permutazione).

Curve

Consideriamo ora le curve chiuse nel piano, che partono e arrivano in un punto fissato O e che non passano per n punti fissati $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Come nel caso delle trecce, non ci interessa la struttura rigida delle curve, ma consideriamo equivalenti (omotope) due curve se le possiamo deformare una nell'altra con continuità, senza muovere il punto base e senza passare mai per i punti $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Per descrivere le curve, possiamo supporre allineati i punti $O, X_1, X_2, \ldots, X_n$ e possiamo scomporre le curve in curve elementari, ognuna delle quali parte dal punto O, gira attorno a uno dei punti X_i, passando sempre sopra a tutti gli altri, e torna al punto di partenza. Denoteremo con x_i la curva elementare che gira in senso antiorario attorno al punto X_i (vedi figura 5), mentre x_i^{-1} sarà la curva che gira in senso orario attorno allo stesso punto X_i. Una curva qualsiasi sarà quindi composizione di curve elementari e sarà descritta da una parola nell'alfabeto degli x_i e x_i^{-1}.

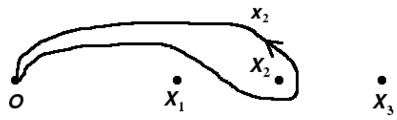

Figura 5: La curva x_2.

Le curve da noi considerate formano un gruppo: la composizione è un'operazione associativa, l'elemento neutro è la curva ε che non racchiude alcun punto al suo interno e l'inversa di una curva si ottiene percorrendola nel verso opposto. Questo gruppo è detto gruppo fondamentale del piano meno n punti. Anch'esso è un gruppo non commutativo.

Azione delle trecce sulle curve

Se ora immaginiamo il piano superiore di una treccia T, dove sono contenute le estremità superiori $X_1, X_2, \dots, X_n$ della treccia, e una curva γ in questo piano che parta e arrivi in un punto O e che non passi per i punti X_i, possiamo lasciar cadere la curva sul piano alla base della treccia, in modo che la curva non intersechi mai i fili della treccia e parta ed arrivi sempre in un punto della retta verticale passante per O. In fondo otterremo quindi una curva chiusa che parte ed arriva in O', la proiezione del punto O, e non passa per $X_1', X_2', \dots, X_n'$, i punti dove arrivano i fili che partono da $X_1, X_2, \dots, X_n$. Avremo cioè una curva γT, ottenuta tramite l'azione della curva γ sulla treccia T, che possiamo descrivere nel modo che conosciamo. Un esempio è illustrato in figura 6.

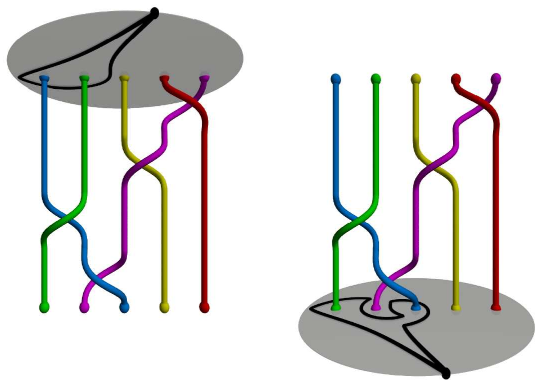

Figura 6: L'azione di una treccia su una curva.

Ora, se componiamo due trecce T e S e facciamo agire la composizione sulla curva γ, la curva $\gamma(TS)$ sarà la stessa che otteniamo come $(\gamma T)S$, cioè applicando prima la treccia T e poi la treccia S:

$$\gamma(TS) = (\gamma T)S.$$

Inoltre, se componiamo due curve γ e δ, facendo agire la loro composizione sulla treccia T otterremo $(\gamma\delta)T$, che sarà la stessa curva ottenuta come $(\gamma T)(\delta T)$, cioè facendo agire T sulle due parti della curva separatamente:

$$(\gamma\delta)T = (\gamma T)(\delta T).$$

Si vede anche che per ogni curva γ e per ogni treccia T valgono

$$\begin{aligned}(\gamma T)T^{-1} &= \gamma(TT^{-1}) = \gamma 1 = \gamma \\ (\gamma T)(\gamma^{-1}T) &= (\gamma\gamma^{-1})T = \varepsilon T = \varepsilon,\end{aligned}$$

da cui segue che $\gamma^{-1}T = (\gamma T)^{-1}$.

Quindi per descrivere l'azione di una treccia su una curva è sufficiente calcolare l'azione di ogni treccia elementare su ogni curva elementare. Si ottiene

$$\begin{aligned}x_i\sigma_i &= x_{i+1} \\ x_{i+1}\sigma_i &= x_{i+1}^{-1}x_ix_{i+1} \\ x_j\sigma_i &= x_j \qquad\qquad \text{se } j \neq i, i-1\end{aligned}$$

e quindi che

$$\begin{aligned}x_i\sigma_i^{-1} &= x_ix_{i+1}x_i^{-1} \\ x_{i+1}\sigma_i^{-1} &= x_i \\ x_j\sigma_i^{-1} &= x_j \qquad\qquad \text{se } j \neq i, i-1\end{aligned}$$

Ora, per calcolare ad esempio l'azione della treccia a tre fili $\sigma_1\sigma_2^{-1}$ sulla curva x_3x_2, si può procedere come segue:

$$\begin{aligned}(x_2x_3)(\sigma_1\sigma_2^{-1}) &= (x_2\sigma_1\sigma_2^{-1})(x_3\sigma_1\sigma_2^{-1}) \\ &= ((x_2\sigma_1)\sigma_2^{-1})((x_3\sigma_1)\sigma_2^{-1}) \\ &= (x_2^{-1}x_1x_2\sigma_2^{-1})(x_3\sigma_2^{-1}) \\ &= (x_2^{-1}\sigma_2^{-1})(x_1\sigma_2^{-1})(x_2\sigma_2^{-1})(x_2) \\ &= (x_2^{-1}x_3^{-1}x_2)(x_1)(x_2^{-1}x_3x_2)(x_2) \\ &= x_2x_3^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_3\end{aligned}$$

Viceversa, si può chiedersi quale curva x dia come immagine una data curva γ sotto l'azione di una data treccia T. In altre parole, date γ e T, vogliamo risolvere l'equazione $xT = \gamma$ nell'incognita x. Per fare ciò, notiamo che possiamo far agire la treccia T^{-1} in entrambi i membri dell'equazione, ottenendo quindi

$\gamma T^{-1} = xTT^{-1} = x$. Quindi possiamo risolvere l'equazione usando l'azione delle trecce elementari sulle curve elementari.

L'attività proposta parte proprio da questo problema, posto con l'aiuto di oggetti concreti: come mettere una cordicella chiusa in cima a una treccia data ($\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$) in modo da ottenere una curva data (ad esempio $x_1^{-1}x_2x_3^{-1}$) in basso?

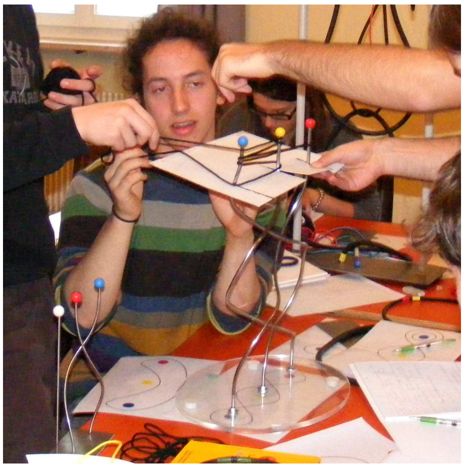

Figura 7: Come mettere la cordicella in cima alla treccia in modo da ottenere, in fondo, una curva data?